CIRCUITI IN REGIME SINUSOIDALE PERMANENTE

METODO SIMBOLICO PER LA SOLUZIONE DI CIRCUITI LINEARI IN CORRENTE ALTERNATA

In figura 1 è illustrato lo schema generalmente utilizzato per determinare la soluzione di regime di circuiti lineari in corrente alternata (c.a.). Il metodo consiste nel trasformare il sistema di equazioni differenziali per i valori istantanei delle tensioni e delle correnti in un sistema algebrico di più agevole soluzione.

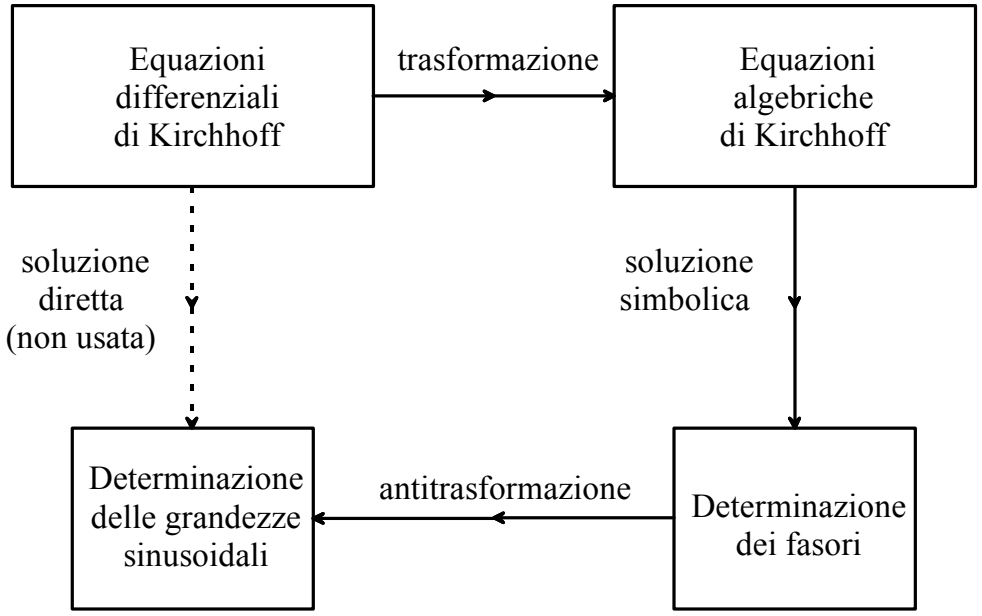


Figura 1. - Schema di risoluzione di circuiti in c.a.

Una volta scritte le equazioni di Kirchhoff ai valori istantanei, il metodo prevede tre passi:

1) Trasformazione delle equazioni di Kirchhoff differenziali in equazioni di Kirchhoff simboliche (algebriche). Come si vedrà tra breve, l'operazione di trasformazione permette di risolvere il circuito con i metodi visti per la soluzione dei circuiti in corrente continua.
2) Risoluzione delle equazioni simboliche e determinazione dei numeri complessi rappresentativi delle varie incognite.
3) Determinazione delle correnti e delle tensioni istantanee a partire dalle grandezze simboliche che le rappresentano. Quest'ultima fase è del tutto immediata, tanto che viene normalmente sottintesa.

TRASFORMAZIONE DELLE EQUAZIONI DI KIRCHHOFF DIFFERENZIALI IN EQUAZIONI ALGEBRICHE (LEGGE DI OHM SIMBOLICA)

Si consideri un generico ramo di circuito, caratterizzato da una resistenza R, un'induttanza L e una capacità C. Il ramo è alimentato da una tensione v(t) sinusoidale (vedi figura 2):

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \alpha_V)$$

dove i valori V_M e α_v sono da considerarsi noti. La legge di Ohm per i valori istantanei nel ramo considerato ha la forma:

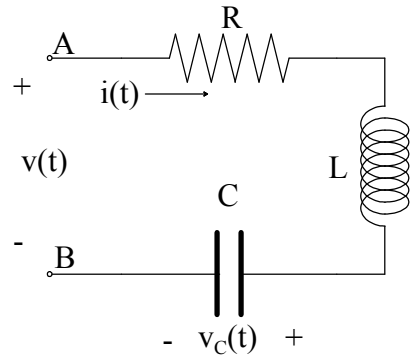


Figura 2.

$v(t) = Ri(t) + L\dfrac{di}{dt}(t) + v_C(t)$. Derivando una volta rispetto al tempo e considerando che $\dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{i(t)}{C}$, si ottiene:

$$R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C}i = \frac{dv}{dt} \tag{1}$$

La soluzione della (1) è costituita dalla somma dell'integrale dell'equazione omogenea associata e di un integrale particolare. E' possibile dimostrare che l'integrale dell'equazione omogenea associata costituisce una componente transitoria della corrente, che tende ad zero all'aumentare del tempo. L'integrale particolare rappresenta quindi la soluzione di regime. Per determinare la soluzione di regime che soddisfa la (1) si cerca una corrente i(t) che soddisfi la (1) e che abbia un andamento sinusoidale con la stessa pulsazione di v(t):

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \alpha_I)$$

Ricordando quanto detto riguardo alla corrispondenza tra grandezze sinusoidali e numeri complessi, la (1) si può riscrivere come segue:

$$\Re\left[-\omega^2 L\sqrt{2}\underline{I}e^{j\omega t}\right] + \Re\left[j\omega R\sqrt{2}\underline{I}e^{j\omega t}\right] + \Re\left[\frac{1}{C}\sqrt{2}\underline{I}e^{j\omega t}\right] = \Re\left[j\omega\sqrt{2}\underline{V}e^{j\omega t}\right]$$

con:

$$\underline{I} = I\,e^{j\alpha_I} \quad , \quad \underline{V} = V\,e^{j\alpha_V}$$

da cui:

$$\Re\left[\left(-\omega^2 L + j\omega R + \frac{1}{C}\right)\sqrt{2}\underline{I}e^{j\omega t}\right] = \Re\left[j\omega\sqrt{2}\underline{V}e^{j\omega t}\right] \tag{2}$$

La (2) può essere interpretata come una relazione di uguaglianza tra due grandezze sinusoidali con identica pulsazione. Per la già citata corrispondenza biunivoca esistente tra grandezze sinusoidali isofrequenziali e numeri complessi, devono risultare uguali i numeri complessi che rappresentano le due grandezze al primo e secondo membro della (2). Si ha quindi:

$$\left(-\omega^2 L + j\omega R + \frac{1}{C}\right)\underline{I} = j\omega\underline{V}$$

da cui:

$$\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]\underline{I} = \underline{V} \tag{3}$$

La grandezza:

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \tag{4}$$

viene detta **impedenza** del ramo AB considerato. Si definisce quindi impedenza $\underline{Z}$ un operatore complesso uguale al rapporto fra i numeri complessi associati alla tensione e alla corrente: $\underline{Z} = \underline{V}/\underline{I}$. Tenendo conto della (4) e della definizione data, la (3) diventa:

$$\underline{V} = \underline{Z}\,\underline{I} \tag{5}$$

La (5) viene detta **equazione di Ohm simbolica**.

La definizione di impedenza (4) può essere riscritta come:

$$\underline{Z} = R + jX \tag{6}$$

avendo posto:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \tag{7}$$

La grandezza X è detta **reattanza** del ramo, e costituisce la parte immaginaria dell'impedenza. La reattanza dipende dalla capacità e dall'induttanza del ramo, e dalla pulsazione ω di alimentazione. La reattanza viene distinta in reattanza induttiva X_L e capacitiva X_C secondo il seguente schema:

$$X_L = \omega L \qquad\qquad X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

$$X = X_L + X_C$$

L'inverso dell'impedenza viene definito **ammettenza**:

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z} \tag{8}$$

In base alla legge di Ohm simbolica, si ha:

$$\underline{I} = \underline{Y}\ \underline{V} \tag{9}$$

da cui si ricava che $\underline{I}$ è un numero complesso di modulo:

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

L'argomento di $\underline{Z}$ determina lo sfasamento (φ) tra il fasore della tensione ed il fasore della corrente. Risulta infatti:

$$\varphi = \arg[\underline{V}] - \arg[\underline{I}] = \alpha_V - \alpha_I = \arg[\underline{Z}] = \mathrm{Arctg}\frac{X}{R}$$

Lo sfasamento φ è positivo quando $\alpha_V > \alpha_I$, cioè quando la tensione è in anticipo rispetto alla corrente. Si noti che, essendo la resistenza R positiva o nulla, risulta $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$. Infine è possibile determinare i(t):

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + X^2}} \cos\left(\omega t + \alpha_V - \mathrm{Arctg}\frac{X}{R}\right)$$

TRASFORMAZIONE SIMBOLICA DELLE EQUAZIONI DI KIRCHHOFF

Sia dato un circuito caratterizzato da R rami ed N nodi. Per ciascun ramo si assumano versi positivi per la tensione di ramo e la corrente di ramo associati secondo la scelta dell'utilizzatore. Preso arbitrariamente un nodo come nodo di riferimento del circuito, la LKT permette di scrivere R relazioni linearmente indipendenti tra tensioni di ramo e tensioni di nodo che, in forma matriciale, assumono la forma:

$$\mathbf{v} = \mathbf{M}\,\mathbf{e}$$

dove **v** è il vettore delle tensioni di ramo, **e** è il vettore delle tensioni di nodo ed **M** è una matrice avente R righe ed (N − 1) colonne, il cui generico elemento M_{hk} risulta nullo se il ramo h non è collegato al nodo k, uguale a +1 se la corrente del ramo h esce dal nodo k, −1 se la corrente del ramo h entra nel nodo k.

La LKC applicata a tutti i nodi tranne quello di riferimento permette di scrivere (N − 1) equazioni che in forma matriciale assumono la forma:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

dove **i** è il vettore delle correnti di ramo ed **A** è una matrice, chiamata matrice di incidenza ridotta, avente (N − 1) righe ed R colonne, il cui generico elemento A_{hk} risulta nullo se il ramo k non è

collegato al nodo h, uguale a +1 se la corrente del ramo k esce dal nodo h, −1 se la corrente del ramo k entra nel nodo h. Risulta quindi che **M** è la trasposta di **A**, cioè:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^T$$

È possibile trasformare le equazioni di Kirchhoff ai valori istantanei con un procedimento del tutto analogo a quello seguito per ricavare la legge di Ohm simbolica. Mediante tale trasformazione si perviene alle seguenti relazioni:

$$\underline{\mathbf{V}} = \mathbf{A}^T \underline{\mathbf{E}} \qquad (10)$$

$$\mathbf{A}\,\underline{\mathbf{I}} = \mathbf{0} \qquad (11)$$

dove $\underline{\mathbf{V}}$ è il vettore dei numeri complessi associati alle tensioni di ramo, $\underline{\mathbf{E}}$ è il vettore dei numeri complessi associati alle tensioni di nodo e $\underline{\mathbf{I}}$ è il vettore dei numeri complessi associati alle correnti di ramo.

Le Leggi di Kirchhoff (delle Tensioni e delle Correnti) ci permettono di scrivere delle equazioni che descrivono la topologia del circuito, ovvero il modo in cui i componenti sono connessi tra loro:

- La Legge di Kirchhoff delle Correnti (*LKC*) afferma che la somma algebrica dei numeri complessi associati alle correnti in un nodo è nulla.

- Equazione simbolica per un nodo (LKC_n): $$\sum_{r=1}^{n} \underline{I}_r = 0 \qquad (12.a)$$

- La Legge di Kirchhoff delle Tensioni (*LKT*) può essere formulata in due modi equivalenti tra loro:

- La somma algebrica dei numeri complessi associati alle tensioni di ramo sui rami di una maglia è nulla*;*

- Equazione simbolica per una maglia (LKT_m): $$\sum_{r=1}^{m} \underline{V}_r = 0 \qquad (12.b)$$

- Ogni numero complesso associato ad una tensione di ramo è dato dalla differenza dei numeri complessi associati ai potenziali di nodo dei suoi terminali.

- Equazione simbolica per un ramo (LKT_r): $$\underline{V}_{AB} = \underline{E}_A - \underline{E}_B \qquad (12.c)$$

Le (12) sono formalmente identiche alle leggi di Kirchhoff per circuiti in regime di corrente continua salvo il fatto che in luogo delle grandezze effettive compaiono i numeri complessi che le rappresentano ed in luogo delle resistenze le impedenze. Questa constatazione permette di affermare che la tecnica risolutiva dei circuiti in regime sinusoidale resta la stessa vista per i circuiti in continua salvo l'impiego dei numeri complessi. Valgono, inoltre, tutti i teoremi sulle reti in continua (Teoremi di Thevenin, di Norton, di Millman, di Tellegen, etc.). Quanto detto mostra anche come non sia necessario, ogni volta che si risolve un circuito, procedere alla "trasformazione" delle equazioni differenziali in simboliche, potendosi scrivere direttamente queste ultime tramite le (12). In definitiva quindi l'operazione di trasformazione è di regola omessa. Anche l'operazione di antitrasformazione si può di solito sottintendere essendo del tutto ovvio il passaggio dai numeri complessi alle grandezze sinusoidali che essi rappresentano. Tale passaggio infatti implica semplicemente che si prendano modulo e argomento del numero complesso e si identifichino con l'ampiezza e la fase della grandezza sinusoidale.

È da notare che una qualsiasi delle correnti o tensioni incognite del problema può essere presa come grandezza di riferimento per gli angoli di fase, cioè è possibile porre uguale a zero la sua fase. Ciò equivale infatti a sceglier una opportuna origine dei tempi.

• **Esempio 1:** I circuiti costituiti da una sola maglia si risolvono tramite la (5), che può scriversi, separando il calcolo del modulo I e dell'argomento α_I:

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \; ; \qquad \alpha_I = \alpha_V - \varphi \quad ; \quad tg\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

• **Esempio 2:** Tutti i metodi illustrati precedentemente sono generalmente applicabili. A titolo di esempio si consideri il circuito illustrato nella figura 3.a, in cui si intende calcolare la corrente circolante sul condensatore C. Sia D il nodo di riferimento. Non sono stati indicati i versi positivi delle tensioni di ramo, perché si suppone di considerare comunque versi di riferimento associati con la regola dell'utilizzatore per tensioni e correnti di ramo. Il circuito è costituito da R = 6 rami e da N = 4 nodi. La figura 3.b mostra lo stesso circuito nel dominio simbolico (i fasori rappresentativi dei generatori indipendenti sono $\underline{E}_S = E_S/\sqrt{2}$ ed $\underline{I}_S = (I_S/\sqrt{2})\ e^{j\alpha_S}$). Uno dei possibili alberi è illustrato in figura 3.c (rami 4, 5 e 6). I rami tratteggiati sono quelli di coalbero (rami 1, 2 e 3).

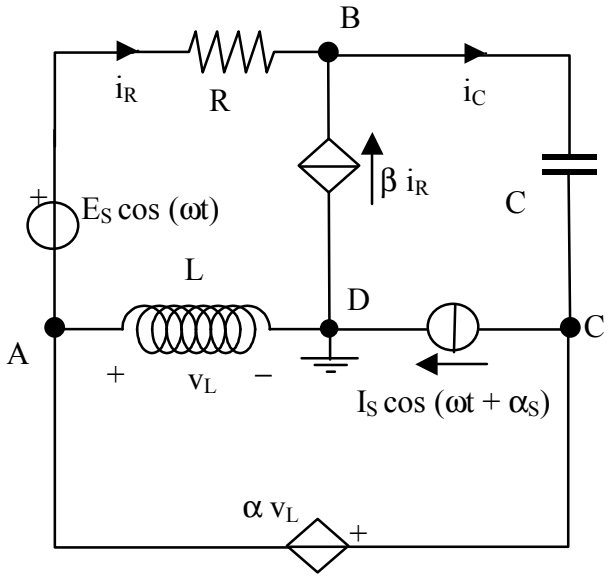


Figura 3a.

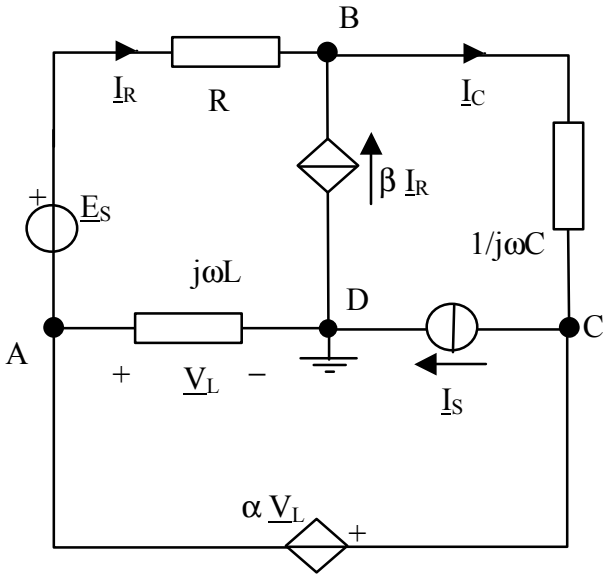


Figura 3b.

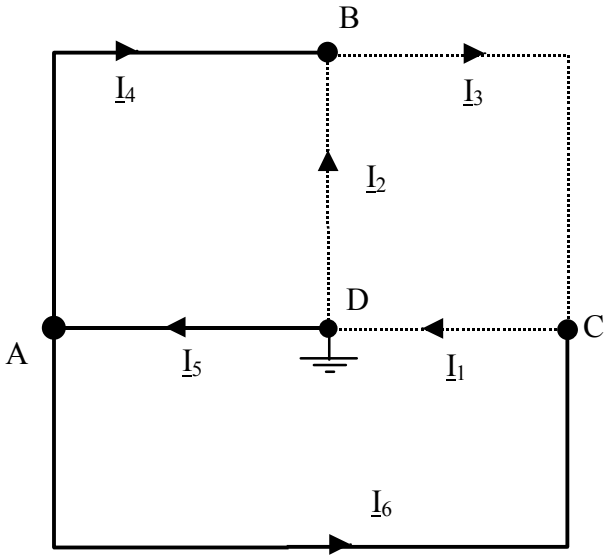


Figura 3c.

Analisi di Tableau (sistema di 2R + N – 1 = 15 equazioni)

(R = 6 equazioni LKT_r in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed N – 1 = 3 potenziali di nodo)

$$\begin{aligned}
\underline{V}_1 &= \underline{E}_C \\
\underline{V}_2 &= -\underline{E}_B \\
\underline{V}_3 &= \underline{E}_B - \underline{E}_C \\
\underline{V}_4 &= \underline{E}_A - \underline{E}_B \\
\underline{V}_5 &= -\underline{E}_A \\
\underline{V}_6 &= \underline{E}_A - \underline{E}_C
\end{aligned} \qquad (13.i)$$

(N – 1 = 3 equazioni LKC_n in cui compaiono come incognite R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned}
\underline{I}_5 - \underline{I}_4 - \underline{I}_6 &= 0 \\
\underline{I}_3 - \underline{I}_4 - \underline{I}_2 &= 0 \\
\underline{I}_1 - \underline{I}_3 - \underline{I}_6 &= 0
\end{aligned} \qquad (13.ii)$$

(R = 6 equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= \underline{I}_S \\
\underline{I}_2 &= \beta \underline{I}_4 \\
\underline{V}_3 &= \underline{I}_3 / j\omega C \\
\underline{V}_4 &= -\underline{E}_S + R\underline{I}_4 \\
\underline{V}_5 &= j\omega L \underline{I}_5 \\
\underline{V}_6 &= \alpha \underline{V}_5
\end{aligned} \qquad (13.iii)$$

La soluzione del sistema (13) consente di determinare $\underline{I}_3$: $\underline{I}_3 = \dfrac{\underline{E}_S + \alpha j\omega L \underline{I}_S}{\dfrac{1}{j\omega C} + \dfrac{R + \alpha\beta j\omega L}{1+\beta}}$

Supponendo che i dati siano: E_S = 10 V, I_S = 5 A, α_S = 50°, R = 2 Ω, L = 0.5 mH, C = 4 μF, α = 3, β = 20, f = 50 Hz si ottiene $\underline{I}_3$ = 6.203 – j 18.07 e quindi i_3 (t) = 27.02 cos (ωt – 1.240) [A].

Eliminazione delle tensioni di nodo (sistema di R + (Numero di componenti non controllati né in tensione né in corrente) = 8 equazioni)

(R – N + 1 = 3 equazioni LKT_m)

$$\begin{aligned} &\underline{V}_1 + j\omega L\underline{I}_5 + \underline{V}_6 = 0 \\ &\underline{V}_2 - R\underline{I}_4 + \underline{E}_S - j\omega L\underline{I}_5 = 0 \\ &-\frac{\underline{I}_3}{j\omega C} - \underline{V}_6 - \underline{E}_S + R\underline{I}_4 = 0 \end{aligned} \qquad (14.i)$$

(N – 1 = 3 equazioni LKC_n)

$$\begin{aligned} &\underline{I}_5 - \underline{I}_4 - \underline{I}_6 = 0 \\ &\underline{I}_3 - \underline{I}_4 - \underline{I}_2 = 0 \\ &\underline{I}_S - \underline{I}_3 - \underline{I}_6 = 0 \end{aligned} \qquad (14.ii)$$

(equazione costitutive dei componenti non controllati né in tensione né in corrente)

$$\begin{aligned} &\underline{I}_2 = \beta \underline{I}_4 \\ &\underline{V}_6 = \alpha\, j\omega L\underline{I}_5 \end{aligned} \qquad (14.iii)$$

Metodo dei Tagli Fondamentali (sistema di R – N + 1 + (Numero di componenti non controllati in corrente) = 5 equazioni)

(R – N + 1 = 3 equazioni LKT_m)

$$\begin{aligned} &\underline{V}_1 + j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2) + \underline{V}_6 = 0 \\ &\underline{V}_2 - R(\underline{I}_3 - \underline{I}_2) + \underline{E}_S - j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2) = 0 \\ &-\frac{\underline{I}_3}{j\omega C} - \underline{V}_6 - \underline{E}_S + R(\underline{I}_3 - \underline{I}_2) = 0 \end{aligned} \qquad (15.i)$$

(equazione costitutive dei componenti non controllati in corrente)

$$\begin{aligned} &\underline{I}_2 = \beta(\underline{I}_3 - \underline{I}_2) \\ &\underline{V}_6 = \alpha\, j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2) \end{aligned} \qquad (15.ii)$$

Metodo dei potenziali di nodo (sistema di N – 1 + (Numero di componenti non controllati in tensione) = 5 equazioni)

(N – 1 = 3 equazioni LKC_n)

$$\begin{aligned} &\frac{-\underline{E}_A}{j\omega L} - \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B + \underline{E}_S}{R} - \underline{I}_6 = 0 \\ &j\omega C(\underline{E}_B - \underline{E}_C) - \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B + \underline{E}_S}{R} - \underline{I}_2 = 0 \\ &\underline{I}_S - j\omega C(\underline{E}_B - \underline{E}_C) - \underline{I}_6 = 0 \end{aligned} \qquad (16.i)$$

(equazioni costitutive dei componenti non controllati in tensione)

$$\begin{aligned} &\underline{I}_2 = \beta\frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B + \underline{E}_S}{R} \\ &\underline{E}_A - \underline{E}_C = -\alpha\,\underline{E}_A \end{aligned} \qquad (16.ii)$$

In questo caso, non essendo $\underline{I}_3$ tra le incognite del sistema, è necessario scrivere separatamente la relazione che la lega ai potenziali di nodo: $\underline{I}_3 = j\omega C\,(\underline{E}_B - \underline{E}_C)$.

Teorema di Thevenin

Si può applicare il teorema di Thevenin alla soluzione del circuito di figura 3.b considerando come bipolo N il condensatore C e quindi come bipolo L l'insieme di tutti gli altri componenti del circuito (vedi figura 3.d). Il bipolo L' è quello indicato nella figura 3.e, mentre il valore della tensione $\underline{E}_0$ viene calcolato risolvendo il circuito riportato nella figura 3.f ed è dato dalla relazione (19). Infine il valore della corrente $\underline{I}_3$ viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 3.g, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Thevenin.

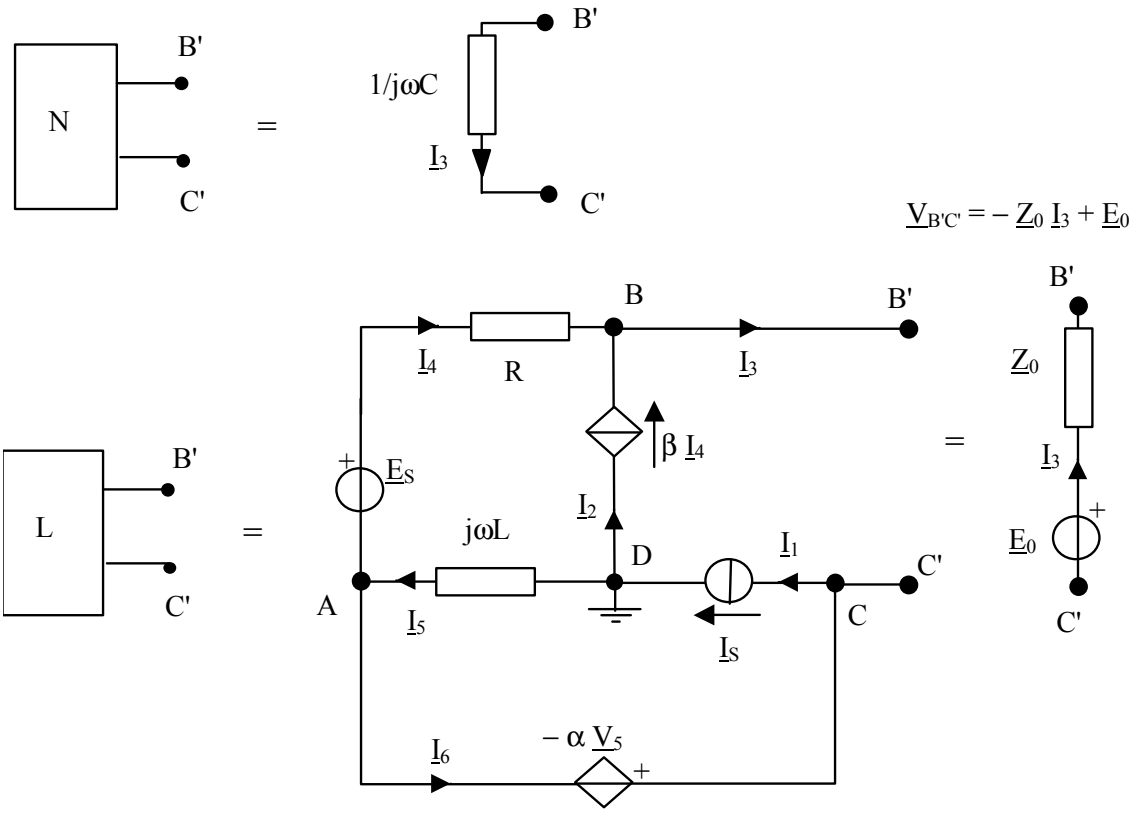


Figura 3.d

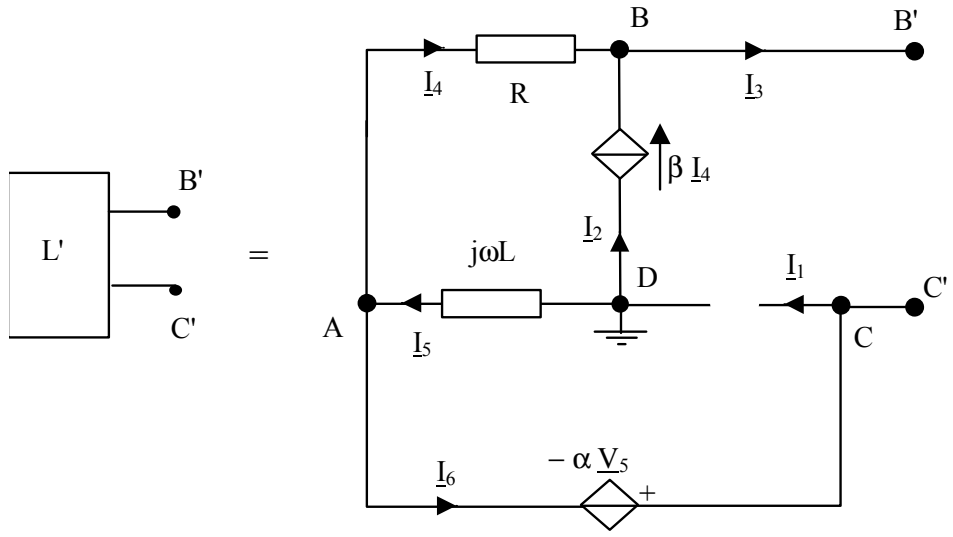


Figura 3.e

La soluzione del circuito di figura 3.e, finalizzata alla determinazione della caratteristica tensione-corrente del bipolo B'C' (cioè della tensione $\underline{V}_{BC}$ in funzione della corrente $\underline{I}_3$) si può effettuare con uno qualsiasi dei metodi precedentemente illustrati. Ad esempio, utilizzando il metodo dei potenziali di nodo si ottiene il seguente sistema di N-1+(Numero di componenti non controllati in tensione) = 5 equazioni. Supponendo nota $\underline{I}_3$, è possibile calcolare $\underline{E}_A$, $\underline{E}_B$, $\underline{E}_C$, $\underline{I}_2$ ed $\underline{I}_6$, che risultano pari a $\underline{E}_A = \beta j\omega L\underline{I}_3/(\beta + 1)$, $\underline{E}_B = (\beta j\omega L - R)\underline{I}_3/(\beta + 1)$, $\underline{E}_C = (\alpha + 1)\beta j\omega L\underline{I}_3/(\beta + 1)$, $\underline{I}_2 = \beta\underline{I}_3/(\beta + 1)$

ed $\underline{I}_6 = -\underline{I}_3$. Pertanto $\underline{V}_{BC} = \underline{E}_B - \underline{E}_C = -(\alpha\beta j\omega L + R)\underline{I}_3/(\beta + 1)$ ed il circuito equivalente del bipolo L' è una impedenza pari a

$$\underline{Z}_0 = \frac{R + \alpha\beta j\omega L}{1+\beta}$$

(N – 1 = 3 equazioni LKC$_n$)

$$\begin{aligned} &\frac{-\underline{E}_A}{j\omega L} - \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B}{R} - \underline{I}_6 = 0 \\ &\underline{I}_3 - \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B}{R} - \underline{I}_2 = 0 \\ &-\underline{I}_3 - \underline{I}_6 = 0 \end{aligned} \qquad (17.i)$$

(equazioni costitutive dei componenti non controllati in tensione)

$$\begin{aligned} &\underline{I}_2 = \beta\frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B}{R} \\ &\underline{E}_A - \underline{E}_C = -\alpha\,\underline{E}_A \end{aligned} \qquad (17.ii)$$

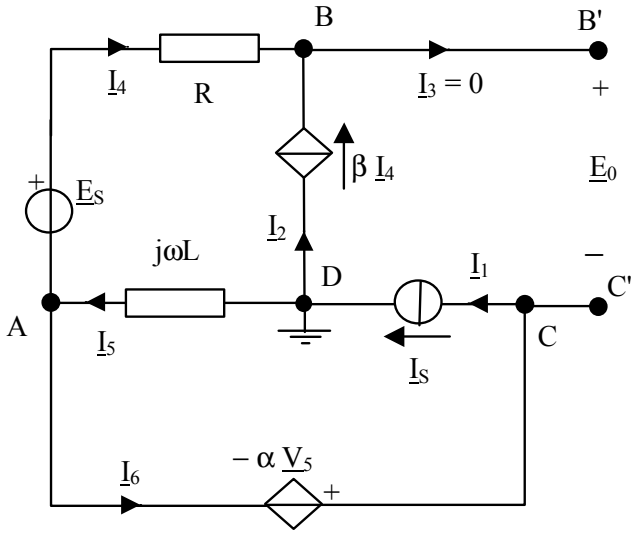


Figura 3.f

La soluzione del circuito di figura 3.f, finalizzata alla determinazione della tensione $\underline{E}_0$ tra i terminali B' e C' si può effettuare con uno qualsiasi dei metodi precedentemente illustrati. Ad esempio, utilizzando il metodo dei Tagli Fondamentali si ottiene il seguente sistema di R – N + 1 + (Numero di componenti non controllati in corrente) = 5 equazioni.

(R – N + 1 = 3 equazioni LKT$_m$)

$$\begin{aligned} &\underline{V}_1 + j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2) + \underline{V}_6 = 0 \\ &\underline{V}_2 - R(-\underline{I}_2) + \underline{E}_S - j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2) = 0 \\ &\underline{E}_0 - \underline{V}_6 - \underline{E}_S + R(-\underline{I}_2) = 0 \end{aligned} \qquad (18.i)$$

(equazione costitutive dei componenti non controllati in corrente)

$$\begin{aligned} &\underline{I}_2 = \beta(-\underline{I}_2) \\ &\underline{V}_6 = \alpha\, j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2) \end{aligned} \qquad (18.ii)$$

Risolvendo le (18) il valore della tensione $\underline{E}_0$ risulta essere:

$$\underline{E}_0 = \underline{E}_S + \alpha j\omega L \underline{I}_S \qquad (19)$$

Infine il valore della corrente $\underline{I}_3$ viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 3.g, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Thevenin. In questo caso, la corrente $\underline{I}_3$ risulta essere:

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_0}{\frac{1}{j\omega C} + \underline{Z}_0} = \frac{\underline{E}_S + \alpha j\omega L \underline{I}_S}{\frac{1}{j\omega C} + \frac{R + \alpha\beta j\omega L}{1+\beta}}$$

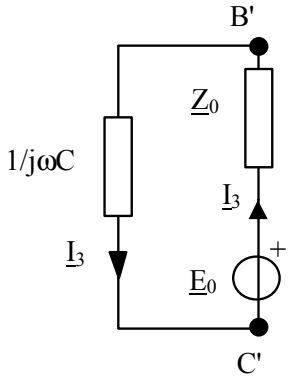


Figura 3.g

Teorema di Norton

Si può applicare il teorema di Norton alla soluzione del circuito di figura 3.b considerando come bipolo N il condensatore C e quindi come bipolo L l'insieme di tutti gli altri componenti del circuito (vedi figura 3.h). Il bipolo L' è quello indicato nella figura 3.e, mentre il valore della corrente $\underline{I}_0$ viene calcolato risolvendo il circuito riportato nella figura 3.i ed è dato dalla relazione (21). Infine il valore della corrente $\underline{I}_3$ viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 3.j, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Norton.

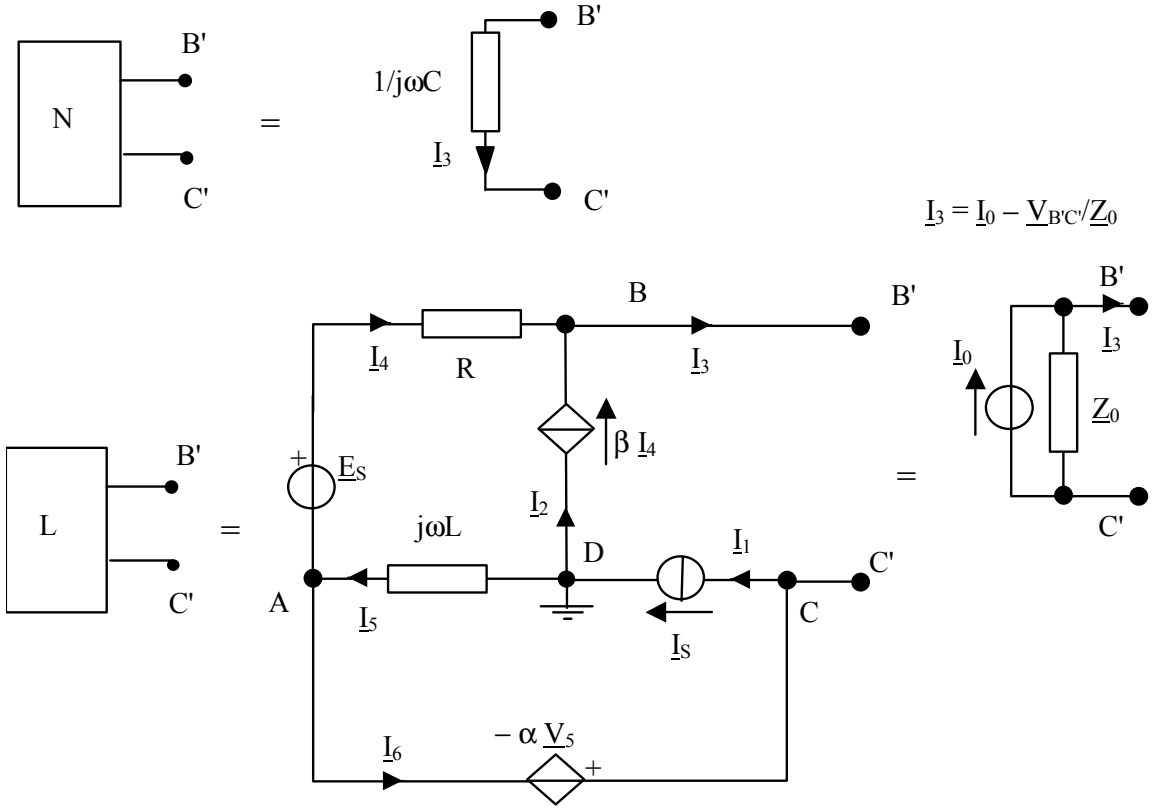


Figura 3.h

La soluzione del circuito di figura 3.e, finalizzata alla determinazione della impedenza equivalente del bipolo B'C', è già stata ottenuta:

$$\underline{Z}_0 = \frac{R + \alpha\beta j\omega L}{1+\beta}$$

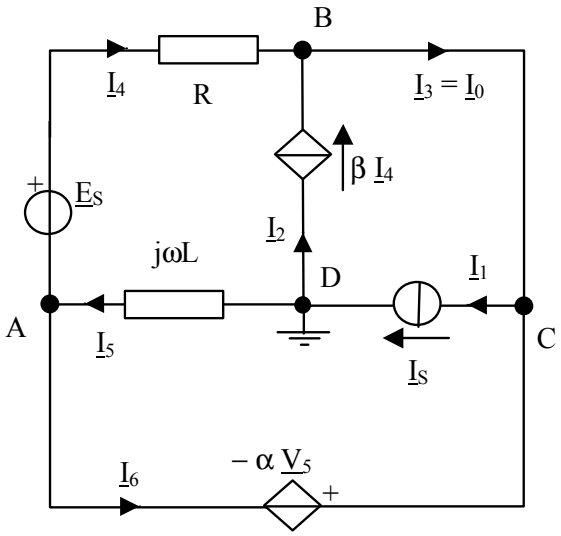


Figura 3.i

La soluzione del circuito di figura 3.i, finalizzata alla determinazione della corrente $\underline{I}_0$ tra i terminali B' e C' si può effettuare con uno qualsiasi dei metodi precedentemente illustrati. Ad esempio, utilizzando il metodo dei Tagli Fondamentali si ottiene il seguente sistema di R – N + 1 + (Numero di componenti non controllati in corrente) = 5 equazioni.

(R – N + 1 = 3 equazioni LKT_m)

$$\begin{aligned} &\underline{V}_1 + j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2) + \underline{V}_6 = 0 \\ &\underline{V}_2 - R(\underline{I}_0 - \underline{I}_2) + \underline{E}_S - j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2) = 0 \\ &-\underline{V}_6 - \underline{E}_S + R(\underline{I}_0 - \underline{I}_2) = 0 \end{aligned} \qquad (20.i)$$

(equazione costitutive dei componenti non controllati in corrente)

$$\begin{aligned} &\underline{I}_2 = \beta(\underline{I}_0 - \underline{I}_2) \\ &\underline{V}_6 = \alpha\, j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2) \end{aligned} \qquad (20.ii)$$

Risolvendo le (20) il valore della corrente $\underline{I}_0$ risulta essere:

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{E}_S + \alpha j\omega L \underline{I}_S}{\frac{R + \alpha\beta j\omega L}{1+\beta}} = \frac{\underline{E}_S + \alpha j\omega L \underline{I}_S}{\underline{Z}_0} \qquad (21)$$

Infine il valore della corrente $\underline{I}_3$ viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 3.j, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Norton. In questo caso, la corrente $\underline{I}_3$ risulta essere:

$$\underline{I}_3 = j\omega C \frac{\underline{I}_0}{j\omega C + \frac{1}{\underline{Z}_0}} = \frac{\underline{Z}_0 \underline{I}_0}{\underline{Z}_0 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\underline{E}_S + \alpha j\omega L \underline{I}_S}{\frac{1}{j\omega C} + \frac{R + \alpha\beta j\omega L}{1+\beta}}$$

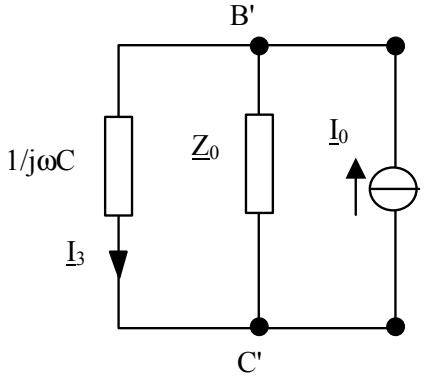
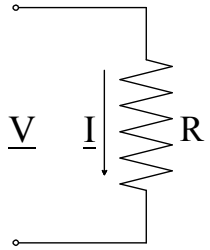
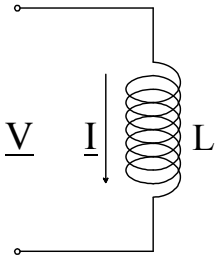
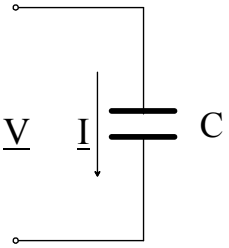
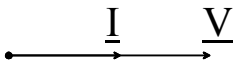
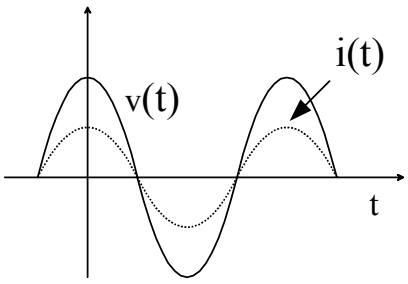
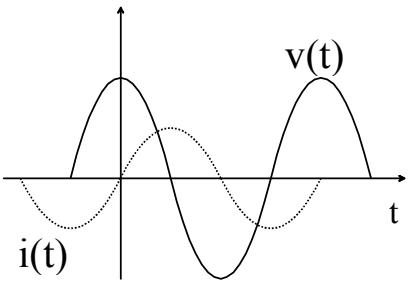
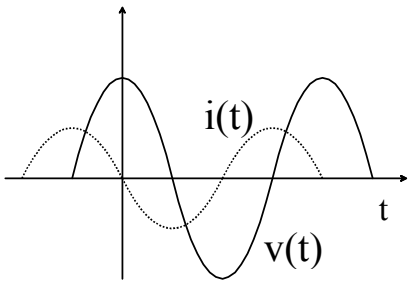


Figura 3.j

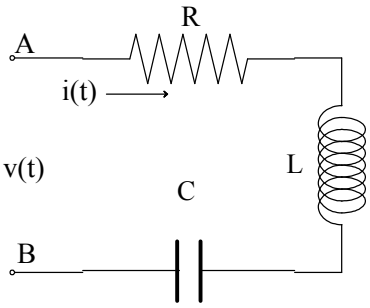
STUDIO DI CIRCUITI ELEMENTARI

Si considerino i tre semplici circuiti raffigurati in figura 4. Per la soluzione di tali circuiti è sufficiente l'applicazione della legge di Ohm simbolica (5). La tabella riassume i risultati ottenuti. La tensione è stata scelta come riferimento di fase, cosicché $\alpha_V = 0$; lo sfasamento è quindi $\varphi = -\alpha_I$. Gli sfasamenti tra fasori sono illustrati in figura 5. L'andamento delle corrispondenti grandezze sinusoidali è mostrato in figura 6.

 *Figura 4.a*	 *Figura 4.b*	 *Figura 4.c*
$\underline{Z} = R$	$\underline{Z} = j\omega L$	$\underline{Z} = -j/\omega C$
$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{R} = \frac{V}{R}$	$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{j\omega L} = \frac{V}{\omega L} e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{-j/\omega C} = V\omega C\, e^{j\frac{\pi}{2}}$
La corrente simbolica $\underline{I}$ è un numero reale in fase con $\underline{V}$: $I = \frac{V}{R},\ \varphi = 0$	La corrente simbolica $\underline{I}$ è un numero immaginario in quadratura in ritardo rispetto a $\underline{V}$: $I = \frac{V}{\omega L},\ \varphi = \pi/2$	La corrente simbolica $\underline{I}$ è un numero immaginario in quadratura in anticipo rispetto a $\underline{V}$: $I = V\omega C,\ \varphi = -\pi/2$
 *Figura 5.a*	*Figura 5.b*	*Figura 5.c*
 *Figura 6.a*	 *Figura 6.b*	 *Figura 6.c*

RISONANZA

Si consideri il circuito mostrato in figura 7. Vengono riportate inoltre le espressioni già viste per il modulo della corrente e per lo sfasamento, mettendo in evidenza la dipendenza di tali grandezze dalla pulsazione ω:



$$I(\omega) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Figura 7.

Si riconosce che, per R, L, C e V fissate, esiste una pulsazione ω_0 per cui la reattanza si annulla:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{22}$$

La pulsazione ω_0 è detta **pulsazione di risonanza**. Ad essa corrisponde la corrente massima in modulo e con sfasamento nullo. In condizioni di risonanza il comportamento del circuito è resistivo, poiché le cadute reattive si compensano a vicenda (vedi diagramma vettoriale).

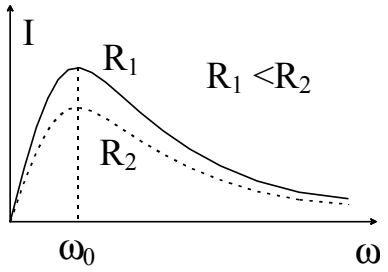


Figura 8.

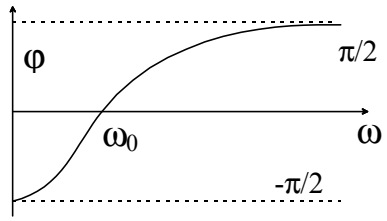


Figura 9.

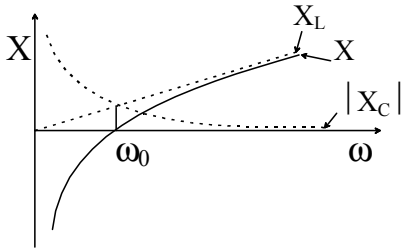


Figura 10.

In figura 8 è rappresentato l'andamento del modulo della corrente in funzione della pulsazione per due diversi valori della resistenza. Nell'ipotetico caso in cui la resistenza del ramo fosse nulla, il modulo della corrente avrebbe un asintoto per $\omega = \omega_0$. Per $\omega \to 0$, la reattanza capacitiva $X_C \to \infty$: la corrente continua è bloccata dal condensatore. Per $\omega \to \infty$, la reattanza induttiva $X_L \to \infty$: gli effetti induttivi tendono a bloccare la corrente ad alte frequenze. Nelle figure 9 e 10 sono rappresentati rispettivamente lo sfasamento e la reattanza in funzione della pulsazione. Per $\omega < \omega_0$, la reattanza capacitiva prevale su quella induttiva, e lo sfasamento $\varphi < 0$; viceversa, per $\omega > \omega_0$ la reattanza induttiva prevale su quella capacitiva e $\varphi > 0$ (vedi diagrammi vettoriali). In figura 11 sono illustrati i diagrammi delle tensioni sul piano di Gauss. Nel caso considerato, la legge di Ohm simbolica si può scrivere:

$$\underline{V} = R\underline{I} + jX_L\underline{I} + jX_C\underline{I}$$

dove sono state evidenziate le cadute di tensione dovute rispettivamente alla resistenza R, alla reattanza induttiva $X_L = \omega L$ ed alla reattanza capacitiva $X_C = -1/\omega C$.

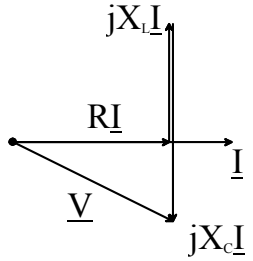


Figura 11.a - Per $\omega < \omega_0$ la reattanza capacitiva prevale su quella induttiva.

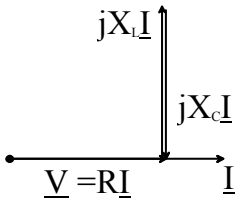


Figura 11.b. - Per $\omega = \omega_0$, la reattanza capacitiva e quella induttiva si compensano.

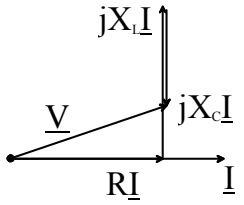


Figura 11.c. - Per $\omega > \omega_0$, la reattanza induttiva prevale su quella capacitiva.

ANTIRISONANZA

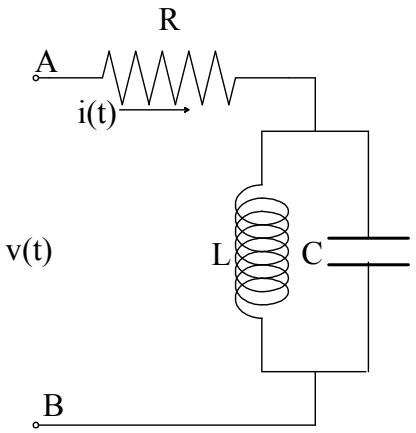


Figura 12.

Si consideri ora il circuito mostrato in figura 12, in cui figurano un'induttanza ed una capacità in parallelo. In base all'equivalenza formale tra equazioni di Kirchhoff in c.c. ed in c.a., le regole di composizione per resistenze in parallelo possono essere estese anche al parallelo di impedenze. E' quindi possibile esprimere l'impedenza $\underline{Z}_{LC}$ equivalente al parallelo tra le due impedenze $\underline{Z}_L$ e $\underline{Z}_C$ nella forma:

$$\underline{Z}_{LC} = \frac{\underline{Z}_L \underline{Z}_C}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = -j\frac{L/C}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} \qquad (23)$$

La corrente che passa attraverso la resistenza R è quindi pari a:

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{R + \underline{Z}_{LC}} \qquad (24)$$

Da cui possiamo dedurre le espressioni per il modulo della corrente e per lo sfasamento, mettendo in evidenza la dipendenza di tali grandezze dalla pulsazione ω

$$I(\omega) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \frac{L^2/C^2}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}}$$

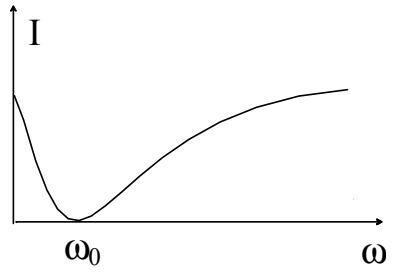


Figura 13.a

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}\frac{L/C}{R\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

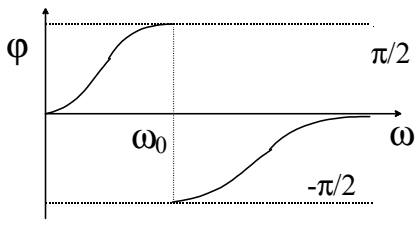


Figura 13.b

Le correnti del ramo induttivo e capacitivo sono pari a:

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{V} - R\underline{I}}{j\omega L} \qquad (25) \qquad\qquad \underline{I}_C = \frac{\underline{V} - R\underline{I}}{-j/\omega C} \qquad (26)$$

Esiste una pulsazione ω_0, detta **pulsazione di antirisonanza**, che rende infinita l'impedenza equivalente $\underline{Z}_{LC}$ e, conseguentemente, annulla la corrente $\underline{I}$:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (27)$$

Mentre la corrente di alimentazione $\underline{I}$ è nulla le correnti $\underline{I}_L$ e $\underline{I}_C$ risultano diverse da zero:

$$\underline{I}_L = -j\sqrt{\frac{C}{L}}\underline{V} = -\underline{I}_C$$

Si instaura cioè un regime periodico di scambio energetico tra il condensatore e l'induttanza. In assenza di dispersioni e di resistenze, la circolazione nella maglia costituita dall'induttanza e dal condensatore continua indefinitamente.

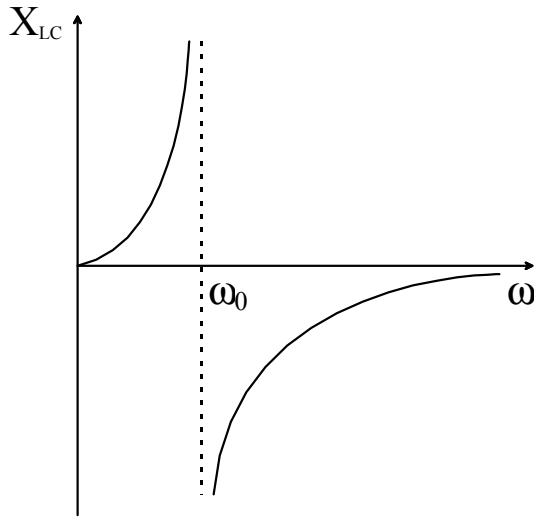


Figura 13.c

In figura 13.c è raffigurato l'andamento della reattanza equivalente del parallelo induttanza - condensatore.

Per $\omega < \omega_0$ la reattanza è positiva, ed il circuito ha un comportamento prevalentemente ohmico - induttivo con uno sfasamento positivo. Per basse frequenze la corrente fluisce prevalentemente nel ramo induttivo, che quindi caratterizza maggiormente il comportamento del circuito. Al limite, per $\omega = 0$, la corrente $\underline{I}_C$ e la reattanza induttiva X_L si annullano, mentre X_C va all'infinito.

Per $\omega > \omega_0$ la reattanza è negativa, ed il circuito ha prevalentemente una caratteristica ohmico - capacitiva, con sfasamento negativo. Per alte frequenze la corrente fluisce maggiormente per il ramo capacitivo. Quando $\omega \to \infty$ la corrente $\underline{I}_L$ e la reattanza capacitiva X_C si annullano, mentre X_L tende all'infinito.

POTENZE IN CORRENTE ALTERNATA

POTENZA ISTANTANEA

Si faccia riferimento all'utilizzatore U in figura 14, alimentato tramite la coppia di morsetti AB da una tensione sinusoidale:

$$v(t) = V_M \cos(\omega t)$$

associata ad una corrente d'alimentazione:

$$i(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi)$$

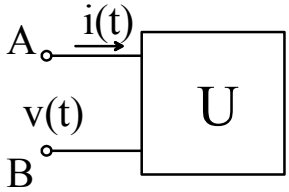


Figura 14.

Si definisce potenza istantanea il prodotto:

$$p(t) = v(t)i(t) \tag{28}$$

La corrente i(t) può essere scomposta nelle due componenti i_a e i_r , dette rispettivamente corrente **attiva** e **reattiva.** La corrente attiva è quindi la componente della corrente in fase con la tensione, mentre la corrente reattiva è la componente in quadratura. Si può dunque scrivere:

$$i_a(t) = I_M \cos(\omega t)\cos\varphi \qquad (29) \qquad i_r(t) = I_M \operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}\varphi \qquad (30) \qquad i = i_a + i_r \qquad (31)$$

La potenza istantanea diventa quindi:

$$p(t) = v(t)i_a(t) + v(t)i_r(t) = p_a(t) + p_r(t) \tag{32}$$

dove[o]:

$$p_a(t) = v(t)i_a(t) = V_M I_M \cos\varphi \cos^2(\omega t) = \frac{V_M I_M}{2}\cos\varphi\,[1+\cos(2\omega t)] \tag{33}$$

$$p_r(t) = v(t)i_r(t) = V_M I_M \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t) = \frac{V_M I_M}{2}\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}(2\omega t) \tag{34}$$

Gli andamenti delle grandezze p_a e p_r, dette rispettivamente **potenza istantanea attiva** e **potenza istantanea reattiva**, sono mostrati nelle figure 15 e 16.

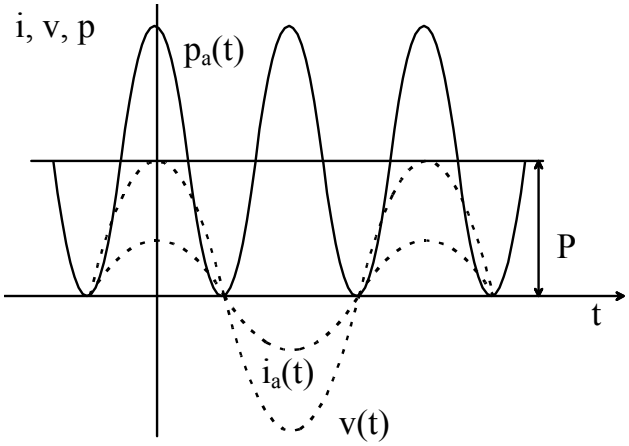


Figura 15. - Potenza istantanea attiva.

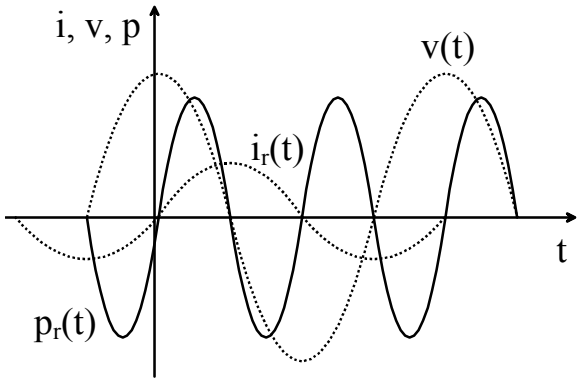


Figura 16. - Potenza istantanea reattiva.

POTENZA ATTIVA

Si riconosce che la potenza istantanea attiva non cambia mai segno, e rappresenta quindi un flusso unidirezionale di energia. Il suo integrale su un periodo T è quindi, di norma, diverso da zero. Si definisce **potenza attiva** P il valore medio in un periodo dalla potenza istantanea:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt \tag{35}$$

È immediato verificare che il valore medio della potenza istantanea coincide col valore medio della potenza attiva istantanea: infatti, la potenza reattiva istantanea è una grandezza sinusoidale e, di conseguenza ha valore medio nullo. Si ha quindi:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p_a(t)dt = \frac{V_M I_M}{T}\cos\varphi \int_0^T \cos^2(\omega t)dt = \frac{V_M I_M}{2}\cos\varphi$$

E, introducendo i valori efficaci di corrente e tensione:

[o] Si ricordi che sen (2x) = 2 sen (x) cos (x) ; cos (2x) = cos^2 (x) – 1 .

$$P = VI\cos\varphi \tag{36}$$

La potenza attiva è quindi valutabile come il prodotto del valore efficace della tensione, il valore efficace della corrente e del **fattore di potenza** cosφ.

POTENZA COMPLESSA

La potenza complessa $\underline{N}$ è definita dalla seguente relazione:

$$\underline{N} = \underline{V}\,\underline{I}^* \tag{37}$$

dove $\underline{I}^*$ è il complesso coniugato di $\underline{I}$. Si ha quindi:

$$\underline{N} = Ve^{j\alpha_V} Ie^{-j\alpha_I} = VIe^{j\varphi}$$

e, ricordando la formula di Eulero:

$$\underline{N} = VI\cos\varphi + jVI\,\mathrm{sen}\,\varphi \tag{38}$$

Risulta così provato, ricordando la (36), che la parte reale della potenza complessa risulta essere pari alla potenza attiva:

$$\Re\left(\underline{N}\right) = P = VI\cos\varphi \tag{39}$$

La parte immaginaria della potenza complessa viene chiamata **potenza reattiva** e nel caso di un bipolo ha la seguente espressione:

$$Q = \Im\left(\underline{N}\right) = V\,I\,\mathrm{sen}\,\varphi \tag{40}$$

Dalla (40) si può notare che un bipolo assorbe potenza reattiva solo quando la corrente è sfasata rispetto alla tensione ($\varphi \neq 0$), ed è quindi presente una componente reattiva della corrente stessa (vedi eq. 30). Ciò avviene quando il componente è in grado di immagazzinare energia senza dissiparla, come, ad esempio in un induttore od in un condensatore; la potenza reattiva è quindi un indicatore di uno scambio di energia di tipo conservativo, che in alcuni casi, che saranno esposti nel paragrafo relativo al problema del rifasamento, è necessario limitare il più possibile.

Il modulo N della potenza complessa è detto **potenza apparente**:

$$N = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{41}$$

Si consideri ora un generico ramo di circuito caratterizzato da un'impedenza $\underline{Z}$. Tenendo conto della legge di Ohm simbolica (5), la (37) può essere riscritta come segue:

$$\underline{N} = \underline{Z}\,\underline{I}\,\underline{I}^* = \underline{Z}I^2 = RI^2 + jXI^2\,. \tag{42}$$

Confrontando la (42) con la (39) e la (40) si ottiene:

$$P = R\,I^2 \tag{43}$$
$$Q = X\,I^2 \tag{44}$$

In base alla definizione di corrente efficace I si ricava subito che la potenza attiva è pari alla media su un periodo della potenza dissipata per effetto Joule sulla resistenza R, unico componente in grado di assorbire energia senza restituirla. La potenza reattiva dipende invece esclusivamente dalla reattanza, cioè dai componenti in grado di immagazzinare energia conservativa (elettrostatica nei condensatori, magnetica nelle induttanze) e di restituirla.

Si noti che, mentre la potenza attiva assorbita dall'impedenza $\underline{Z}$ è sempre positiva, il segno della potenza reattiva dipende dalla reattanza prevalente nel ramo. Q è quindi positiva per reattanze prevalentemente induttive ($Q = \omega LI^2$ per una reattanza puramente induttiva), e negativa per reattanze prevalentemente capacitive ($Q = -I^2/\omega C$ per una reattanza puramente capacitiva).

ADDITIVITÀ DELLE POTENZE

Dalle equazioni (10) ed (11) segue, come corollario del Teorema di Tellegen, l'additività delle potenza in regime sinusoidale. Infatti, per un dato circuito, preso un qualsiasi vettore di numeri complessi rappresentativi di tensioni di ramo $\underline{\mathbf{V}}_1$, che soddisfi le LKT per quel circuito, ed un vettore di numeri complessi rappresentativi di correnti di ramo $\underline{\mathbf{I}}_2$, che soddisfi le LKC per quel circuito, vale la seguente relazione:

$$\underline{\mathbf{V}}_1{}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{I}}_2{}^{*} = 0 \tag{45}$$

Infatti, si ha

$$\underline{\mathbf{V}}_1{}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{I}}_2{}^{*} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\underline{\mathbf{E}}_1)^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{I}}_2{}^{*} = \underline{\mathbf{E}}_1{}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}\underline{\mathbf{I}}_2{}^{*} = \underline{\mathbf{E}}_1{}^{\mathrm{T}}\,(\mathbf{A}\underline{\mathbf{I}}_2)^{*} = \underline{\mathbf{E}}_1{}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{0} = 0$$

Se si applica la (45) considerando i vettori di numeri complessi rappresentativi delle tensioni e delle correnti che effettivamente sono presenti nel circuito, si ottiene la relazione (46) che, sulla base della definizione (37), mostra come la potenza complessa assorbita da tutti i componenti del circuito risulti in ogni istante nulla.

$$\underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{I}}^{*} = \underline{V}_1\,\underline{I}_1{}^{*} + \underline{V}_2\,\underline{I}_2{}^{*} + \ldots = \underline{N}_1 + \underline{N}_2 + \ldots = 0 \tag{46}$$

Si consideri ora il circuito schematizzato in figura 17, alimentato tramite la coppia di morsetti AB da una tensione sinusoidale v(t) rappresentata dal numero complesso $\underline{V}$. Il circuito è composto da m rami che si incontrano in n nodi. Assumendo che in ogni ramo i versi positivi di riferimento della tensione e della corrente di ramo siano associati, indicando con $\underline{N}_h$ la potenza reattiva assorbita dal generico ramo h e con $\underline{V}_h$ ed $\underline{I}_h$ i fasori rappresentativi della tensione e della corrente di ramo, risulta (dato che $\underline{V}_1\,\underline{I}_1{}^{*} + \underline{V}_2\,\underline{I}_2{}^{*} + \ldots + \underline{V}_{BA}\,\underline{I}^{*} = 0$):

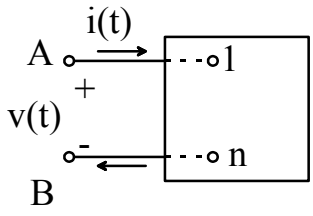


Figura 17.

$$\sum_{h=1}^{m}\underline{N}_h = \sum_{h=1}^{m}\underline{V}_h\,\underline{I}_h^{*} = -\underline{V}_{BA}\,\underline{I}^{*} = \underline{V}_{AB}\,\underline{I}^{*} = \underline{N}$$

Si può quindi affermare che: *la potenza complessa* $\underline{N}$ *fornita al circuito attraverso la coppia di morsetti* AB *è pari alla somma delle potenze complesse* $\underline{N_h}$ *assorbite da tutti i rami del circuito.* Nel caso in cui ciascun ramo sia costituito da una impedenza in serie con un generatore di tensione, avendo indicato con $\underline{N}_{gi}$ la potenza complessa erogata dal generatore presente sul ramo i, e con $\underline{Z}_i$ l'impedenza in serie a tale generatore, segue:

$$\underline{N} + \sum_{i=1}^{m}\underline{N}_{g,i} = \sum_{i=1}^{m}\underline{Z}_i I_i^2 \tag{47}$$

Eguagliando le parti reali e le parti immaginarie della relazione (47) si ottiene:

$$P + \sum_{i=1}^{m}P_{g,i} = \sum_{i=1}^{m}R_i I_i{}^2\,, \tag{48}$$

$$Q + \sum_{i=1}^{m}Q_{g,i} = \sum_{i=1}^{m}X_i I_i{}^2\,. \tag{49}$$

La (48) esprime il fatto che la potenza attiva fornita dalla coppia di morsetti AB ($P = VI\cos\varphi$) più la somma delle potenze attive fornite dai generatori è pari alla somma delle potenze attive assorbite dalle impedenze dei rami del circuito e dissipate per effetto Joule. Analogamente, la potenza reattiva fornita dalla coppia di morsetti AB ($Q = VI\sin\varphi$) più la somma delle potenze reattive fornite dai generatori è pari alla somma delle potenze reattive assorbite dalle impedenze dei rami del circuito.

TEOREMA DEL MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA

Nella figura 18 è rappresento schematicamente un bipolo che alimenta un carico $\underline{Z}_L$. Si faccia l'ipotesi che il circuito sia in regime sinusoidale isofrequenziale. Si vuole determinare l'impedenza di carico $\underline{Z}_L$ che rende massima la potenza attiva ricevuta dal carico. Questo problema si presenta nel progetto di ogni amplificatore: si deve scegliere l'impedenza di ingresso che rende massima la potenza ricevuta.

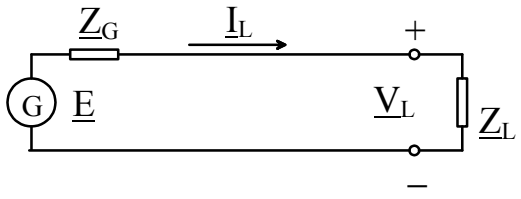


Figura 18.

La potenza attiva assorbita dal carico si calcola immediatamente, avendo posto:

$$\underline{Z}_G = R_G + j\,X_G \qquad\qquad \underline{Z}_L = R_L + j\,X_L$$

Risulta infatti:

$$P_L = R_L\left|\underline{I}_L\right|^2 = R_L\frac{E^2}{\left|\underline{Z}_L + \underline{Z}_G\right|^2} = R_L\frac{E^2}{(R_L+R_G)^2+(X_L+X_G)^2}$$

Poiché E, R_G e X_G sono assegnati, si tratta di determinare quali valori di R_L e X_L rendono massima la P_L. Una prima osservazione è che, relativamente ad X_L, il denominatore è certamente minimo quando $X_L = -X_G$. Per quanto riguarda la R_L, è sufficiente annullare la derivata della P_L rispetto ad R_L:

$$\frac{dP_L}{dR_L} = E^2\left[\frac{1}{(R_L+R_G)^2} - \frac{2R_L}{(R_L+R_G)^3}\right] = \frac{(R_L-R_G)E^2}{(R_L+R_G)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_L = R_G$$

Si è ricavato quindi il seguente **Teorema del massimo trasferimento di potenza**: *Sia assegnato un bipolo funzionante in regime sinusoidale isofrequenziale, specificato dal suo circuito equivalente di Thevenin, che alimenti una impedenza di carico* $\underline{Z}_L$*. Tale impedenza riceve dal bipolo la massima potenza attiva se, e solo se:*

$$\underline{Z}_L = \underline{Z}^*_G$$

In tal caso si dice che il carico è adattato al bipolo e la potenza attiva (massima) fornita al carico è $P_{L,MAX} = E^2/4R_G$. Si noti che anche se il carico è adattato al bipolo, solo il 50% dell'energia del generatore fluisce nel carico e quindi il rendimento è pari a 0.5. Infatti, introducendo il rendimento si ha:

$$\eta = \frac{P_u}{P_u + P_d} = \frac{R_L I_L^2}{R_L I_L^2 + R_G I_L^2} = \frac{R_L}{R_L + R_G} = \frac{1}{1+(R_G/R_L)}$$

dove P_u è la potenza utile e P_d la potenza dissipata. Si noti che il rendimento può essere reso arbitrariamente vicino ad uno facendo aumentare la R_L. In tal caso però la potenza assorbita dal carico tende a zero.

RIFASAMENTO

Nella figura 19 è rappresento schematicamente un generatore di tensione in c.a. G che alimenta, tramite una linea di lunghezza L, un utilizzatore U. La lunghezza della linea è tale che è possibile schematizzarla mediante una impedenza di linea $\underline{Z}_L$ ($\underline{Z}_L = R_L + j\ X_L$) Conseguentemente la tensione $\underline{V}$ di ingresso dell'utilizzatore U è pari a:

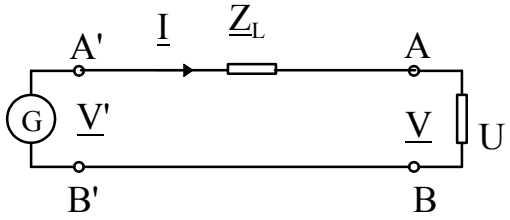


Figura 19.

$$\underline{V} = \underline{V}' - \underline{Z}_L\,\underline{I}$$

A causa della caduta di tensione $\underline{Z}_L\underline{I}$ la tensione $\underline{V}$ non è uguale a $\underline{V}'$, e soprattutto varia a seconda dell'utilizzatore. Alla resistenza di linea è inoltre associata una potenza dissipata per effetto Joule:

$$P_d = R_L\, I^2$$

Tali effetti possono essere limitati riducendo la corrente di linea quando questo è possibile.

Esistono degli utilizzatori che, essendo caratterizzati da un fattore di potenza (cosφ) basso necessitano di elevati valori di corrente per assorbire la potenza nominale per cui sono stati progettati. Infatti, dalla (27) si ha:

$$I = \frac{P}{V\cos\varphi}$$

Tanto più basso è il fattore di potenza, tanto maggiore è, a parità di tensione e potenza assorbita, la corrente di alimentazione. Un rimedio a tale situazione si può ottenere **rifasando** l'utilizzatore, cioè disponendo in parallelo ad esso un opportuna reattanza. Il tipo di reattanza dipende dallo sfasamento dell'utilizzatore: occorre un condensatore se φ>0, un induttore se φ < 0.

Si faccia riferimento al caso più frequente in cui φ>0 (vedi figura 20). Il diagramma delle correnti si ricava facilmente tenendo conto che:

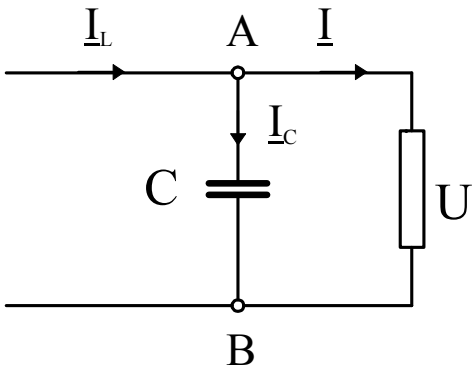


Figura 20.

$$\underline{I}_L = \underline{I} + \underline{I}_C$$

e che $\underline{I}_C$ è in quadratura in anticipo rispetto a $\underline{V}$. Da tale diagramma (vedi figura 21) si vede come sia possibile ridurre in maniera considerevole la corrente di linea. La presenza del condensatore in parallelo ad U rende in teoria possibile annullare lo sfasamento φ' del blocco condensatore - utilizzatore (rifasamento completo). In realtà il rifasamento completo è raramente necessario, è sufficiente che l'angolo φ' assuma un valore prefissato convenientemente piccolo. Dalla (39) e dalla (40) si ottiene:

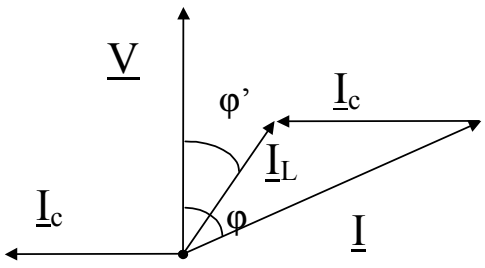


Figura 21.

$$Q = P\tan\varphi \qquad (50) \qquad\qquad Q + Q_c = P\tan\varphi' \qquad (51)$$

dove P, Q, Q_c sono rispettivamente la potenza attiva assorbita dal utilizzatore, la potenza reattiva assorbita dall'utilizzatore e la potenza reattiva assorbita dalla capacità. La (51) è stata ottenuta tenendo conto che la potenza attiva assorbita dal condensatore è nulla. Sottraendo membro a membro la (51) dalla (50) si ottiene:

$$Q_c = P\,(\tan\varphi' - \tan\varphi) \qquad (52)$$

Tenendo conto che: $Q_c = X_c\, I_c^2 = -\, I_c^2/\omega C = -\,(\omega C V)^2/\omega C = -\,\omega C V^2$, dalla (52) si ricava:

$$C = \frac{P}{\omega V^2}\left(\tan\varphi - \tan\varphi'\right) \tag{53}$$

che consente di calcolare la capacità C del condensatore fissato l'angolo φ'.

La funzione del condensatore di rifasamento può essere spiegata intuitivamente: esso rappresenta un componente in grado di scambiare alternativamente energia con l'utilizzatore. La presenza del condensatore, diminuendo la potenza reattiva vista dal generatore, riduce quindi lo scambio alternato di energia lungo la linea.