GRANDEZZE PERIODICHE

INTRODUZIONE

Una grandezza tempodipendente a(t) si definisce **periodica** quando ad uguali intervalli T assume valori uguali, cioè quando vale la relazione (con n intero qualsiasi):

$$a(t) = a(t + nT) \tag{1}$$

- Il tempo T si definisce **periodo**;

- La grandezza $f = 1/T$, che rappresenta il numero di periodi contenuti nell'unità di tempo, si definisce **frequenza**. La frequenza si misura in Hertz [Hz] (periodi/secondo);

- Si definisce **valore medio** di a(t) la media di a(t) eseguita sul periodo T:

$$A_m = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} a(t)dt \tag{2}$$

- Si definisce **valore efficace** di a(t) la radice quadrata della media dei quadrati dei valori istantanei di a(t) eseguita su un periodo T:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} a^2(t)dt} \tag{3}$$

- Una grandezza periodica si definisce **alternata** quando il suo valore medio è nullo;

GRANDEZZE SINUSOIDALI

Una grandezza alternata del tipo:

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha) \tag{4}$$

si dice **sinusoidale.**

- La grandezza A_M che compare nella (4) è detta **ampiezza**, ed è pari al valore massimo di a(t);

- La grandezza ω è detta **pulsazione**, ha le dimensioni di una velocità angolare (radianti/secondo) ed è pari a $2\pi/T$;

- La grandezza α è detta **fase**. La fase dipende dal valore che a(t) assume all'istante t = 0.

Il valore medio di una grandezza sinusoidale è pari a zero (per ogni valore di A_M e α).

Il valore efficace di una grandezza sinusoidale è pari a:

$$A = \sqrt{\frac{{A_M}^2}{T}\int_{t}^{t+T} \cos^2(\omega t)\, dt} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} \cong 0.707\, A_M \tag{5}$$

Una grandezza sinusoidale è quindi completamente definita da tre parametri:

1) L'ampiezza A_M, o il valore efficace, A.
2) La pulsazione ω, o la frequenza f, o il periodo T.
3) La fase α, o la differenza di fase con un'altra grandezza sinusoidale nota di uguale pulsazione.

Siano a(t) e b(t) due grandezze sinusoidali isofrequenziali (vedi figura 1):

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha_a) \qquad\qquad b(t) = B_M \cos(\omega t + \alpha_b)$$

Si definisce **differenza di fase** tra a e b l'angolo

$$\phi = \alpha_a - \alpha_b$$

L'angolo ϕ è chiaramente indipendente dall'istante iniziale di riferimento.

- Se $\phi = 0$, a(t) e b(t) si dicono in **fase** (vedi figura 2.a);
- Se $\phi > 0$, a(t) è in **anticipo di fase** rispetto a b(t), che è a sua volta in **ritardo di fase** rispetto ad a(t). Se $\phi < 0$ la situazione si inverte;
- Se $\phi = \pm\pi$, a(t) e b(t) si dicono in **opposizione** (vedi figura 2.b);
- Se $\phi = \pm\pi/2$, a(t) e b(t) si dicono in **quadratura** (vedi figura 2.c).

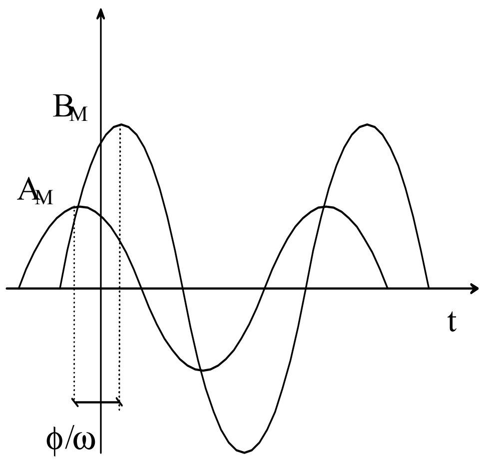

Figura 1. - a(t) è in anticipo rispetto a b(t).

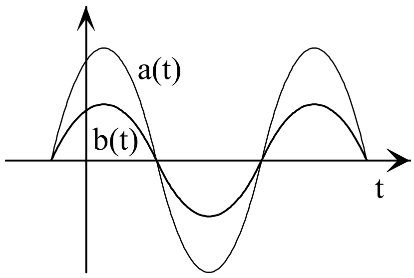

Figura 2.a - a(t) e b(t) sono in fase.

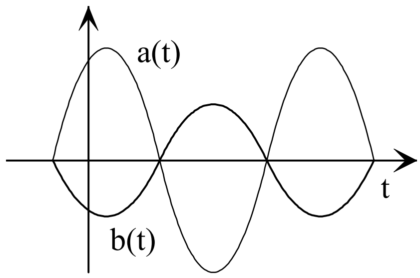

Figura 2.b - a(t) e b(t) sono in opposizione.

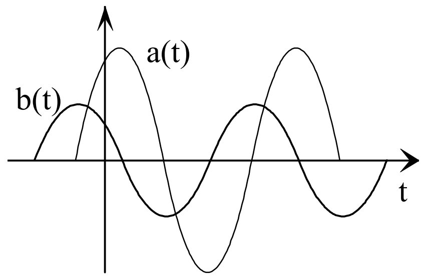

Figura 2.c - a(t) e b(t) sono in quadratura.

OPERAZIONI SU GRANDEZZE SINUSOIDALI

Il **prodotto** di una grandezza sinusoidale

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha)$$

per uno scalare m è una grandezza sinusoidale c(t) con ampiezza pari a mA_M, con pulsazione ω, e con fase pari a α (c(t) e a(t) in fase) se $m > 0$,o a $\alpha + \pi$ (c(t) e a(t) in opposizione) se $m < 0$.

La **somma di due grandezze sinusoidali** isofrequenziali è ancora una grandezza isofrequenziale. Si ha infatti:

$$A_M \cos(\omega t + \alpha_a) + B_M \cos(\omega t + \alpha_b) = C_M \cos(\omega t + \alpha_c) \tag{6}$$

dove:

$$C_M = \sqrt{A_M^2 + B_M^2 + 2A_M B_M \cos(\alpha_a - \alpha_b)}\,; \qquad \alpha_c = \mathrm{arctg}\left(\frac{A_M \,\mathrm{sen}\,\alpha_a + B_M \,\mathrm{sen}\,\alpha_b}{A_M \cos\alpha_a + B_M \cos\alpha_b}\right)$$

La **derivata** di una grandezza sinusoidale a(t) è pari a:

$$\frac{d}{dt}\left[A_M \cos(\omega t+\alpha)\right] = -\omega A_M \operatorname{sen}(\omega t+\alpha) = \omega A_M \cos\left(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right) \qquad (7)$$

La derivata di a(t) è quindi una grandezza sinusoidale di pulsazione ω con ampiezza pari a ωA_M e con un anticipo di fase pari a $\pi/2$ (quindi in quadratura anticipo).

RAPPRESENTAZIONE DI GRANDEZZE SINUSOIDALI CON I NUMERI COMPLESSI (TRASFORMATA DI STEINMETZ)

Si riporta la formula di Eulero:

$$e^{jx} = \cos(x) + j \operatorname{sen}(x) \qquad (8)$$

da cui:

$$\cos(x) = \Re\left[e^{jx}\right] \qquad (9)$$

dove con $\Re$ si indica l'operatore "parte reale". La grandezza sinusoidale:

$$a(t) = A_M \cos(\omega t+\alpha) = \Re\left[A_M e^{j(\omega t+\alpha)}\right] = \Re\left[\sqrt{2} A e^{j\omega t} e^{j\alpha}\right] \qquad (10)$$

può essere quindi interpretata come componente reale di un opportuno numero complesso. Ponendo:

$$\underline{A} = A e^{j\alpha} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} e^{j\alpha} \qquad (11)$$

Il numero complesso $\underline{A}$, detto **fasore**, individua univocamente la grandezza sinusoidale a(t). La (10) definisce quindi una corrispondenza biunivoca tra grandezze sinusoidali e numeri complessi (trasformata di Steinmetz). Il numero complesso $\underline{A}$ può essere scritto nella forma:

$$\underline{A} = M + j N$$

dove M ed N sono la componente reale ed immaginaria di $\underline{A}$ (vedi figura 3); modulo e fase sono dunque:

$$|\underline{A}| = \sqrt{M^2 + N^2}$$

$$\alpha = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{N}{M}\right) & , se\ M > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{N}{M}\right) & , se\ M < 0 \end{cases}$$

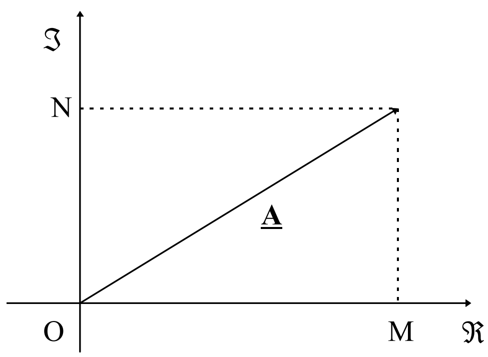

Figura 3.

• Operazioni con il metodo simbolico

- SOMMA: Date due grandezze sinusoidali rappresentate dai numeri complessi $\underline{A}e^{j\omega t} = (M_1 + j N_1)e^{j\omega t}$ e $\underline{B}e^{j\omega t} = (M_2 + j N_2)e^{j\omega t}$ è facile verificare la grandezza sinusoidale a(t) + b(t) è rappresentata da un numero complesso $\underline{C}e^{j\omega t}$, dove:

$$\underline{C} = (M_1 + M_2) + j(N_1 + N_2) \qquad\qquad \underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$$

- PRODOTTO PER UN NUMERO REALE: Data una grandezza sinusoidale a(t) rappresentata dal numero complesso $\underline{A}e^{j\omega t}$ ed un numero reale m, si verifica immediatamente che il numero complesso $\underline{C}e^{j\omega t}$ che rappresenta il prodotto m a(t) è tale che:

$$\underline{C} = m\underline{A}$$

- Prodotto per il numero immaginario puro j:

Data una grandezza sinusoidale a(t) rappresentata dal numero complesso $\underline{A}\ e^{j\omega t}$ e tenendo conto che $j = e^{j\pi/2}$, si ha che:

$$j\,\underline{A}\,e^{j\omega t} = A\,e^{j(\alpha+\pi/2)}e^{j\omega t}$$

Sul piano di Gauss, $\underline{A}\ e^{j\omega t}$ moltiplicato per j viene ruotato di π/2 nel senso positivo di rotazione come mostrato in figura 4.

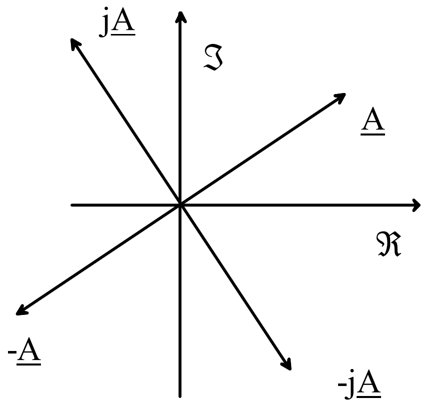

Figura 4.

- DERIVAZIONE: La derivata di $\underline{A}\ e^{j\omega t}$ è pari a $\underline{D}\ e^{j\omega t}$. Infatti:

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{A}e^{j\omega t}\right) = j\omega\underline{A}e^{j\omega t} \qquad \text{, dove:} \qquad \underline{D} = j\omega\,\underline{A}$$

Sul piano complesso quindi la derivata di $\underline{A}\ e^{j\omega t}$ è rappresentata da un vettore di modulo pari a ωA e ruotato rispetto a $\underline{A}\ e^{j\omega t}$ di un angolo pari a π/2 in senso positivo.

RAPPRESENTAZIONE SIMBOLICA DI GRANDEZZE SINUSOIDALI ISOFREQUENZIALI

In modo del tutto equivalente a quanto è stato fatto per i fasori, nella rappresentazione simbolica di più grandezze sinusoidali isofrequenziali è lecito omettere il fattore rotante $e^{j\omega t}$, poiché generalmente interessa conoscere la posizione reciproca dei vettori rappresentativi. Una qualsiasi grandezza sinusoidale:

$$a(t) = \sqrt{2}A\cos(\omega t + \alpha)$$

può quindi essere rappresentata dal numero complesso:

$$\underline{A} = Ae^{j\alpha}$$

In ogni problema, si può assumere una grandezza sinusoidale arbitraria come riferimento di fase, ponendo il suo angolo di fase pari a 0. In tal modo, la grandezza assunta come riferimento di fase sarà rappresentata da un numero reale puro. Quanto detto finora ci permette di esprimere le seguenti corrispondenze:

$$a(t) \Leftrightarrow \underline{A} \qquad\qquad a(t)+b(t) \Leftrightarrow \underline{A}+\underline{B}$$

$$\frac{da}{dt} \Leftrightarrow j\omega\underline{A} \qquad\qquad m\,a(t) \Leftrightarrow m\,\underline{A}$$

$$\frac{d^2a}{dt^2} \Leftrightarrow -\omega^2\underline{A} \qquad\qquad \int_{-\infty}^{t} a(\tau)\,d\tau \Leftrightarrow \frac{\underline{A}}{j\omega}$$

- **Complesso coniugato**

Dato un numero complesso $\underline{A} = Ae^{j\alpha}$, si definisce "complesso coniugato di $\underline{A}$" il numero $\underline{A}^*$, avente modulo uguale e fase opposta:

$$\underline{A}^* = A\,e^{-j\alpha} \tag{12}$$

Si verifica facilmente che il prodotto di un numero complesso per il suo coniugato è pari al quadrato del modulo:

$$\underline{A}\,\underline{A}^* = A^2 \tag{13}$$