

QUADRO GENERALE DELL'ELETTROMAGNETISMO

La figura 1 mostra in sintesi una suddivisione dell'elettromagnetismo in branche: si noti la prima suddivisione dell'elettromagnetismo in “**elettrostatica**” ed “**elettrodinamica**”. Per definizione l'elettrostatica tratta fenomeni stazionari (come è implicito nell'annullarsi di tutte le derivate temporali), nei quali le cariche si mantengono in quiete (annullamento della densità di corrente). L'elettrodinamica, nella quale è previsto il movimento delle cariche, comprende l'elettrodinamica “stazionaria”, in cui rimangono ancora nulle le derivate temporali, e la “non stazionaria”, che rappresenta il caso generale in cui nessuna semplificazione viene introdotta. Tra queste due parti se ne inserisce una terza: l'elettrodinamica “quasi stazionaria”, la cui definizione prevede una discriminazione preliminare fra le grandezze le cui derivate temporali devono ritenersi diverse da zero e quelle che invece possono essere trascurate con approssimazione sufficiente per le esigenze tecniche.

Un capitolo a parte è rappresentato dalla magnetostatica, in cui sono nulle le derivate temporali, e le cariche possono essere oppure no in moto. Benché tale regime si sovrapponga in parte all'elettrodinamica stazionaria, lo scopo principale della magnetostatica è lo studio del campo magnetico prodotto dalle correnti (supposte note) e non delle correnti stesse.

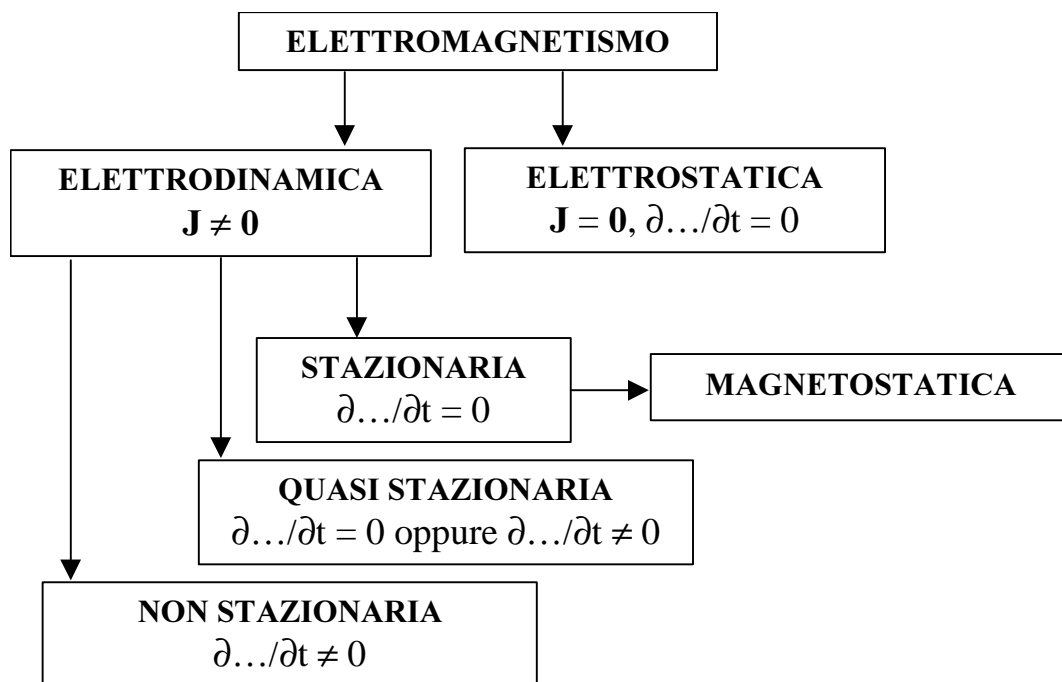


Fig 1. Quadro generale dell'elettromagnetismo.

ELETTROSTATICA

Dal quadro precedente e dalla definizione si trae

Def.: $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, $\partial \dots / \partial t = 0$

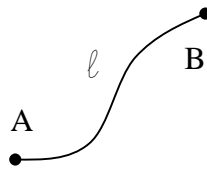
$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= 0 & (1) \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho & (2) \\ \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} & (3) \\ \sigma \mathbf{E} &= 0 & (*) (4) \end{aligned}$$

b) Potenziale V

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla V \quad (5)$$

campo elettrico conservativo !

(*) Si supponga per ora nullo \mathbf{E}_i

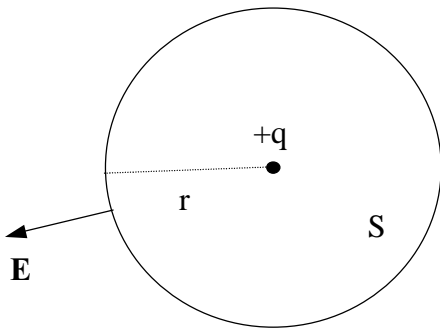


$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_A - V_B \quad (6)$$

Il potenziale $V(x, y, z)$ definito dalla (5) a meno di una costante si assume di regola uguale a zero all'infinito.

Dalla (6): \longrightarrow
$$V_A = \int_A^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (7)$$

Per la (7), il potenziale in un generico punto A è il "lavoro" del campo elettrico su una carica unitaria lungo una qualunque linea che partendo da A va all'infinito.



b) Campo prodotto da una carica puntiforme in un mezzo omogeneo indefinito

La simmetria sferica consente di affermare che $V = V(r)$ e quindi le superfici equipotenziali sono superfici sferiche concentriche con la carica; oltre a ciò il $|\mathbf{E}|$ dipende solo da r .

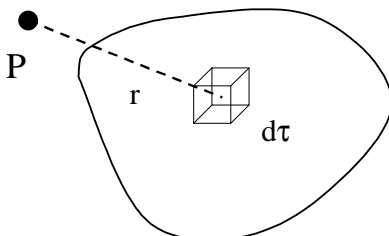
Dalla (2) [Legge di Gauss] applicata alla sfera di figura:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = D 4\pi r^2 = q \quad \Rightarrow \quad D = \frac{q}{4\pi r^2} \quad (8)$$

e quindi ($\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$)

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi \epsilon r^2} \quad (9)$$

dalle (5) e (9): \longrightarrow
$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dr} = \frac{q}{4\pi \epsilon r^2} \quad \xrightarrow[\text{[}V_\infty=0\text{]}]{\text{integrando}} \quad V = \frac{q}{4\pi \epsilon r} \quad (10)$$



La (10) si generalizza al caso di una distribuzione volumetrica di cariche

$$dV = \frac{\rho d\tau}{4\pi \epsilon r} \quad \Rightarrow \quad V(\mathbf{P}) = \frac{1}{4\pi \epsilon} \int_\tau \frac{\rho}{r} d\tau \quad (11)$$

c) Equazione di Poisson

$$\left. \begin{array}{l} \text{div} \mathbf{D} = \rho \\ \mathbf{E} = -\text{grad} V \\ \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{div grad} V = -\frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Almeno teoricamente l'equazione di Poisson fornisce la soluzione $V(x, y, z)$ relativa ad una data distribuzione di cariche fisse aventi una densità assegnata $\rho(x, y, z)$.

La logica della soluzione è la seguente:

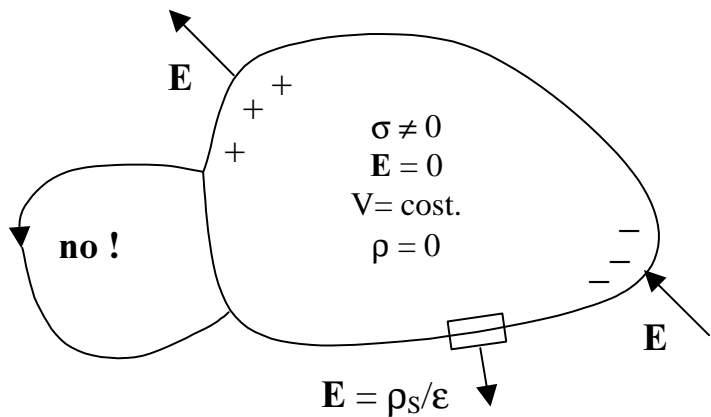
$$\rho(x, y, z) \xrightarrow{(12)} V(x, y, z) \xrightarrow{(5)} \mathbf{E}(x, y, z)$$

d) Regime elettrostatico dei conduttori

dalla (4): $\sigma \mathbf{E} = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \sigma = 0, \mathbf{E} \neq 0 \quad (\text{isolanti}) \quad (13) \\ \sigma \neq 0, \mathbf{E} = 0 \quad (\text{conduttori}) \quad (14) \end{array} \right.$

$\mathbf{E} = 0$ (14) $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D} = 0, \rho = 0 \\ V = \text{cost.} \end{array} \right.$

La figura mette anche in evidenza:



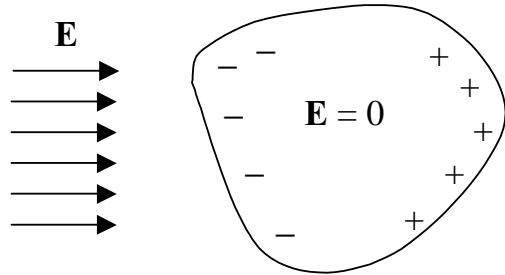
- La distribuzione superficiale di cariche aventi densità superficiale ρ_s

$$\rho_s(x, y, z) = \frac{dq}{dS}$$

- Il valore del campo in prossimità della superficie del conduttore [Legge di Gauss $\Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon}$ (Teorema di Coulomb)] (15)
- Il verso del campo elettrico in prossimità di cariche superficiali positive e negative
- L'impossibilità per una linea di flusso, che parte dal conduttore, di "ricadere" sul conduttore stesso.

e) Influenza elettrostatica

È la reazione di un conduttore (eventualmente scarico) che in presenza di un campo elettrico esterno mette in evidenza cariche superficiali, distribuite in modo tale da annullare il campo elettrico all'interno del conduttore stesso

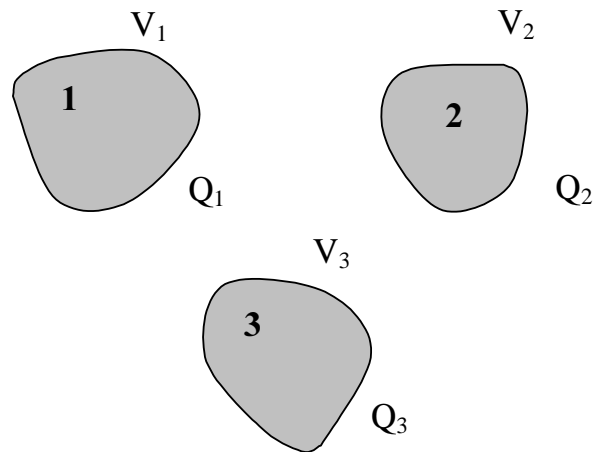


f) Campo all'esterno dei conduttori: Equazione di Laplace

Nella regione esterna ai conduttori, supposto $\rho = 0$, l'equazione di Poisson si semplifica nella:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (16) \text{ [Eq. Laplace]}$$

(V è una funzione armonica)



Teorema di Unicità (cenno)

Per i quali, assegnati i potenziali dei conduttori e soddisfatte le “condizioni di regolarità del potenziale all'infinito” (equivalenti di regola a non aver cariche all'infinito), resta individuato il potenziale $V(x, y, z)$

In sostanza:

$$E = \frac{\rho_s}{\epsilon} \Rightarrow Q_i = \oint_{S_i} \epsilon E \cdot n \, dS$$

$$V_1, V_2, V_3 \xrightarrow{(16)} V(x, y, z) \xrightarrow{(5)} E(x, y, z) \xrightarrow{(15)} Q_1, Q_2, Q_3 \text{ [Problema di Dirichlet]}$$

il problema inverso $Q_1, Q_2, Q_3 \rightarrow V(x, y, z)$ è il Problema di Neumann

Vi è quindi un legame di linearità (certamente lineare, data la linearità delle equazioni fin qui trattate) fra le cariche ed i potenziali dei conduttori

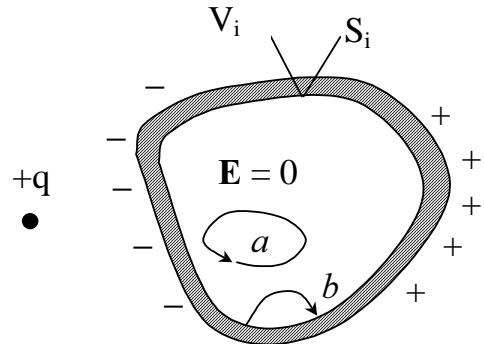
$$(17) \begin{cases} Q_1 = a_{11} V_1 + a_{21} V_2 + a_{31} V_3 \\ Q_2 = a_{12} V_1 + a_{22} V_2 + a_{32} V_3 \\ Q_3 = a_{13} V_1 + a_{23} V_2 + a_{33} V_3 \end{cases} \text{ ovvero } (18) \begin{cases} V_1 = b_{11} Q_1 + b_{21} Q_2 + b_{31} Q_3 \\ V_2 = b_{12} Q_1 + b_{22} Q_2 + b_{32} Q_3 \\ V_3 = b_{13} Q_1 + b_{23} Q_2 + b_{33} Q_3 \end{cases}$$

ove i coefficienti a e b dipendono dalla configurazione geometrica del sistema e dalla costante dielettrica del mezzo interposto (o dei mezzi interposti tra i conduttori).

g) Schermi elettrostatici

All'interno di un corpo conduttore cavo è nullo il campo elettrico generato da cariche elettriche situate all'esterno della cavità stessa.

Non possono infatti esistere né linee di flusso di tipo a ($\text{rot } \mathbf{E} = 0, \text{div } \mathbf{E} = 0$), né linee di flusso di tipo b ($V_A = V_B, \text{div } \mathbf{E} = 0$).

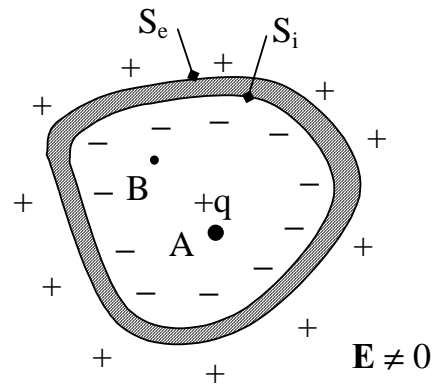


Un'altra dimostrazione immediata si fonda sul teorema di unicità: dato che S_i è equipotenziale con potenziale V_i , nella cavità $V(x, y, z) = V_i = \text{cost.}$ soddisfa sia la (16) che la condizione al contorno e quindi è l'unica soluzione. Ad essa ovviamente ($V = \text{cost.}$) corrisponde $\mathbf{E} = 0$.

Il conduttore esercita una funzione schermante solo verso l'interno, non viceversa (vedi figura a lato).

Nell'ipotesi di schermo inizialmente scarico si deduce che:

- Una carica q situata all'interno richiama per influenza elettrostatica una carica $-q$ su S_i e $+q$ su S_e (Legge di Gauss).
- Lo spostamento da A a B di q non altera il campo \mathbf{E} all'esterno [Teorema di unicità per la regione esterna, con la condizione che su S_e la carica e quindi (Problema di Neumann) il potenziale rimangono invariati]



h) Condensatori

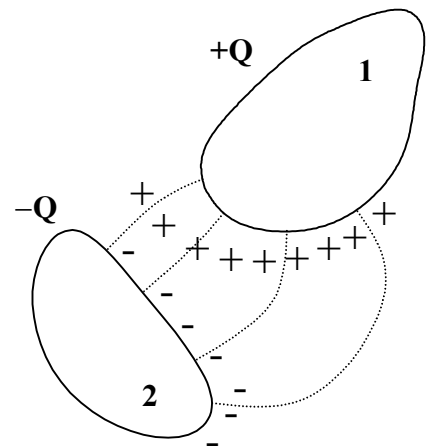
Condensatore è l'insieme di due conduttori posti in presenza l'uno dell'altro e molto distanti da qualsiasi altro conduttore (in modo da poterne trascurare l'influenza), aventi cariche uguali ed opposte.

Dalle (18)

$$\begin{cases} V_1 = b_{11}Q_1 + b_{21}Q_2 \\ V_2 = b_{12}Q_1 + b_{22}Q_2 \end{cases}$$

Ma poiché $Q_2 = -Q_1 = Q$, sottraendo si ottiene:

$$V_1 - V_2 = (b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21})Q \Rightarrow V_1 - V_2 \propto Q \quad (19)$$



È quindi possibile per la (19) dare la seguente definizione di **capacità** del condensatore

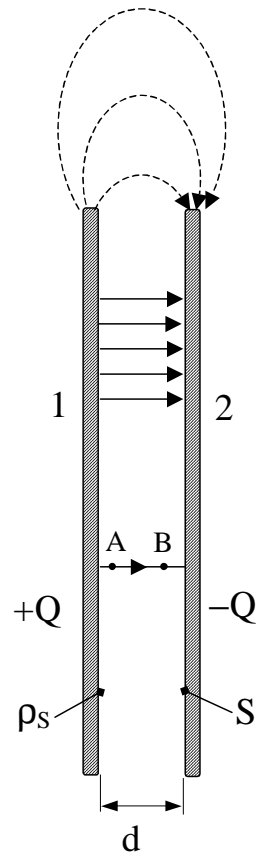
$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \quad (20)$$

C dipende ovviamente dalla configurazione geometrica e dalla natura del mezzo interposto (ϵ).

i) Calcolo di capacità

Per le forme geometriche che interessano, si semplifica con opportune ipotesi che risultano accettabili fisicamente. Come esempio consideriamo il Condensatore ad armature piane e parallele con dielettrico omogeneo.

Ipotesi: 1) trascurabili gli effetti di bordo (linee nella regione esterna)
2) fra le armature, linee di flusso rettilinee e parallele.



Si deduce successivamente, per la regione interna:

- la costanza di E lungo una linea di flusso [dall'ipotesi 2) e $\text{div } \mathbf{E} = 0 \Rightarrow E_A = E_B$
- l'uniformità di E e di ρ_S ed i rispettivi valori:

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{(5)} E = \frac{V_1 - V_2}{d} \\ \xrightarrow{(15)} \rho_S = \frac{Q}{S} = \epsilon E \end{array} \right\} \Rightarrow (\text{eliminando } E) \Rightarrow \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon S}{d}$$

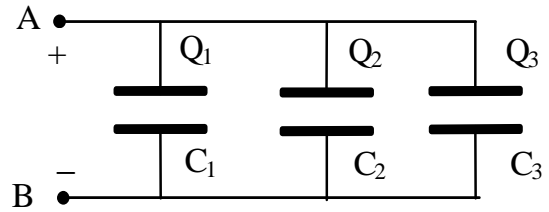
da cui

$$C = \frac{\epsilon S}{d} \quad (21)$$

I) Collegamenti di condensatori

Collegamento in parallelo

Con esso (vedi figura) i vari condensatori sono vincolati ad avere la stessa differenza di potenziale ΔV .



Calcoliamo la capacità equivalente C_e (ossia quella capacità che a pari ΔV ha pari Q)

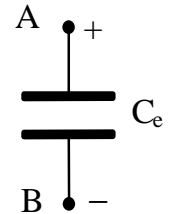
$$Q_1 = C_1 \Delta V$$

$$Q_2 = C_2 \Delta V$$

$$Q_3 = C_3 \Delta V$$

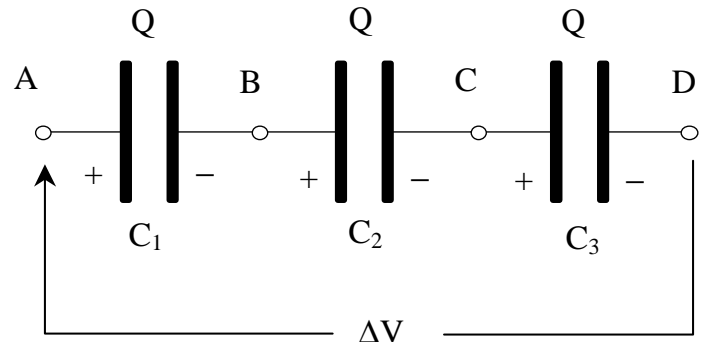
$$\left. \begin{array}{l} Q_1 + Q_2 + Q_3 = (C_1 + C_2 + C_3) \Delta V \\ Q = C_e \Delta V \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_e = C_1 + C_2 + C_3}$$



Collegamento in serie

Con esso (vedi figura) i vari condensatori sono vincolati ad avere la stessa Q . (In altri termini le armature collegate a due a due hanno carica complessiva nulla)



$$V_A - V_B = \frac{Q}{C_1}$$

$$V_B - V_C = \frac{Q}{C_2}$$

$$V_C - V_D = \frac{Q}{C_3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta V = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) Q \\ \Delta V = \frac{1}{C_e} Q \end{array} \right\}$$

\Rightarrow

$$\boxed{\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

capacità equivalente

PROPRIETÀ ELETTRICHE DEI MATERIALI CONDUTTORI ED ISOLANTI

La resistività dei metalli varia con la temperatura secondo il coefficiente di proporzionalità α : esso è positivo e costante fra circa -100°C e $+150^{\circ}\text{C}$. La resistività alla temperatura T è data da:

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

La formula non è valida vicino allo zero assoluto (superconduttività) ed al punto di fusione; i conduttori non metallici hanno generalmente un coefficiente di temperatura negativo. Gli isolanti hanno pure un coefficiente di temperatura negativo e di valore non costante.

materiale	resistività ρ [n Ω ·m]	conducibilità σ [MS/m]	coefficiente di temperatura α [m Ω /(Ω ·K)] (a 20°C)
Argento (99.9%)	16	62.5	3.8
Rame elettrolitico	17.6	56.8	3.9
Rame ricotto	17.3	56.8	3.9
Rame incrudito	17.7	56.8	3.85
Oro	23.6	42.4	3.0
Alluminio crudo	28	35.7	4
Zinco	62	16.1	4.0
Platino	117	8.5	3.9
Bronzo	36	27.7	1.65
Nickel	136	13.8	5
Ferro (99%)	100 ÷ 150	6.7 ÷ 10	5.5
Ghisa	700 ÷ 1600	0.6 ÷ 1.4	2.0 ÷ 4.5
Acciaio (0.1% C)	200	5	4.2
Acciaio (0.4% C)	160	6.2	4.2
Acciaio (1% Si)	170	5.9	-
Acciaio (2% Si)	350	2.8	-
Acciaio (4% Si)	550	1.8	-
Grafite	4000 ÷ 20000	0.05 ÷ 0.25	0.4
Carbone per spazzole	20000 ÷ 100000	0.01 ÷ 0.05	0.4

Nel vuoto e nell'aria la costante dielettrica ha il valore $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m; negli altri mezzi ha valori variabili, che sono generalmente ottenuti valutando la costante dielettrica relativa ϵ_r riferita a quella del vuoto ($\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$).

materiale	resistività ρ [M Ω ·m]	costante dielettrica relativa, ϵ_r	temperatura massima di lavoro [°C]	rigidità dielettrica K [MV/m]	densità ρ_m [kg/m ³]
Porcellana	$10^3 \div 10^7$	4.5 ÷ 6	1000	10 ÷ 12	2400
Bachelite	$10^3 \div 10^4$	5 ÷ 7	130	10 ÷ 12	1600
Carta secca	$10^3 \div 10^4$	1.6 ÷ 2.6	90	4 ÷ 6	820
Vetro	$10^5 \div 10^8$	4.5 ÷ 10	-	30 ÷ 150	4500
Mica	$10^6 \div 10^9$	5 ÷ 6	750	60 ÷ 200	2800
Gomma	$10^6 \div 10^8$	2.3 ÷ 2.7	70	16 ÷ 50	1500
Carta paraffinata	10^8	2.5 ÷ 4	90	10 ÷ 20	1100

La *rigidità dielettrica*, misurata in V/m, è l'intensità di campo (elettrico) necessaria a provocare la *scarica disruptiva* attraverso il dielettrico. Nei gas e nei liquidi la scarica provoca la volatilizzazione di una parte delle molecole, però al cessare della scarica il dielettrico si ricostituisce e riacquista le sue proprietà isolanti. Nei solidi la scarica porta alla distruzione del dielettrico che rimane perforato nelle zone di minore resistenza alla scarica.

2. ELETTRODINAMICA STAZIONARIA

Le condizioni che caratterizzano, per definizione, l'elettrodinamica stazionaria sono:

$$\mathbf{J} \neq \mathbf{0} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \dots}{\partial t} = 0 \quad (2.2)$$

La (2.1), che deve intendersi verificata almeno in qualche punto dello spazio, indica la presenza di cariche in movimento (ossia di "correnti elettriche"). La (2.2), che si intende valida per ogni grandezza, indica la "stazionarietà" del regime. Introducendo la (2.2) nelle equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo, le semplificano nelle relazioni seguenti:

FORMA LOCALE

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

\Leftrightarrow

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

\Leftrightarrow

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ DELLA CARICA ELETTRICA

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

\Leftrightarrow

EQUAZIONI DELLA DIVERGENZA

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

\Leftrightarrow

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

\Leftrightarrow

FORMA INTEGRALE

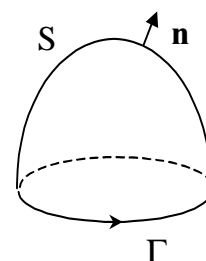
$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_c$$

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$



EQUAZIONI DI LEGAME MATERIALE PER MEZZI LINEARI, OMOGENEI E ISOTROPI

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

Tali equazioni possono essere separate in due sistemi disaccoppiati, come segue:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.3) \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.4) \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.7)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \quad (2.5) \qquad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.8)$$

Il sistema (2.3), (2.4), (2.5) è finalizzato allo studio dei fenomeni elettrodinamici stazionari, ovvero alla determinazione della densità di corrente \mathbf{J} assumendo come noti i campi impressi. Viceversa, il sistema (2.6), (2.7), (2.8) è finalizzato allo studio dei fenomeni magnetostatici, ovvero alla determinazione del campo magnetico \mathbf{H} e del campo di induzione magnetica \mathbf{B} assumendo come nota la densità di corrente. Le equazioni (2.4) e (2.7), nell'affermare la solenoidalità dei vettori \mathbf{J} e \mathbf{B} , implicano che i tubi di flusso dei vettori \mathbf{J} e \mathbf{B} sono necessariamente chiusi. A tali tubi di flusso viene dato il nome di "circuiti elettrici" e "circuiti magnetici", rispettivamente ^(o).

^(o) Si noti che per quanto riguarda la $\nabla \cdot \mathbf{H}$, essa è in genere diversa da zero e quindi \mathbf{H} non è in genere un vettore solenoidale. È semplice mostrarlo considerando che $0 = \nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = \mu \nabla \cdot \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \nabla \mu$. Dato inoltre che la permeabilità magnetica è solitamente data come funzione del modulo del campo magnetico, cioè come $\mu = \mu(H)$, si può scrivere $\nabla \mu = (d\mu/dH) \nabla H$. Pertanto risulta $\nabla \cdot \mathbf{H} = - (d\mu/dH) (\mathbf{H} \cdot \nabla H) / \mu$. Tuttavia, nel caso che la permeabilità di un mezzo si possa considerare costante (ipotesi che spesso è sufficientemente corretta), $d\mu = 0$ e quindi anche $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$. Solo in questo caso sono definibili i tubi di flusso di \mathbf{H} , che, ovviamente, coincidono con quelli di \mathbf{B} .

È opportuno notare che nello studio dei circuiti elettrici non è necessario fare riferimento alla eventuale presenza di un campo magnetico, in quanto tale presenza non influisce sullo studio delle correnti. Infatti, l'ipotesi iniziale di stazionarietà ha consentito di eliminare tutte le derivate temporali nelle equazioni generali e conseguentemente ha "annullato" il termine $(-\partial\mathbf{B}/\partial t)$, unico possibile responsabile di una eventuale influenza del campo magnetico sulle correnti.

È quindi possibile uno studio autonomo delle correnti cosiddette "continue", sulla sola base delle equazioni (2.3), (2.4) e (2.5). Da esse si deducono importanti proprietà, che suggeriscono anche opportune definizioni. In particolare dalla (2.3) si deduce che il campo elettrico è derivante da un potenziale scalare (così come in elettrostatica):

$$\mathbf{E} = -\nabla v \quad (2.9)$$

Come si è già affermato, un circuito elettrico è per definizione un tubo di flusso del vettore densità di corrente \mathbf{J} . La solenoidalità di \mathbf{J} garantisce la costanza del flusso di \mathbf{J} attraverso una qualunque sezione del circuito. Poiché tale flusso è una corrente elettrica si conclude che ha senso parlare di "corrente i di un circuito elettrico" senza specificare a quale sezione si fa riferimento, in quanto la corrente si mantiene la stessa per tutte le sezioni:

$$J_1 S_1 = J_2 S_2 = i \quad (2.10)$$

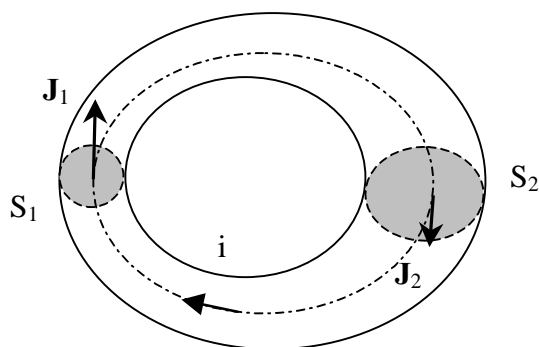


Fig. 2.1

Nel seguito, salvo precisazione contraria, si considereranno "circuito filiformi", tali cioè che le dimensioni relative ad una generica sezione trasversale ed il raggio di curvatura della linea d'asse siano trascurabili rispetto alle dimensioni longitudinali, per i quali è lecito supporre uniforme la distribuzione di \mathbf{J} sulla sezione trasversale S . Questo porta ad una semplice relazione tra corrente i e modulo della densità di corrente:

$$i = JS$$

Si definisce ora la forza elettromotrice (f.e.m.) relativa alla linea d'asse del circuito elettrico come

$$e = \oint_C \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} \quad (2.11)$$

NECESSITÀ DELL'ESISTENZA DEI CAMPI IMPRESSI

È possibile collegare la f.e.m. alla corrente. Dalla definizione:

$$e = \oint_C \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (JS) \frac{d\mathbf{l}}{\sigma S} = \oint_C i \frac{d\mathbf{l}}{\sigma S} = i \oint_C \frac{d\mathbf{l}}{\sigma S} = Ri \quad (2.12)$$

La relazione lineare tra f.e.m. e corrente appena ottenuta ($e = Ri$) è detta Legge di Ohm. La grandezza R che compare è detta resistenza del circuito ed è definita da:

$$R = \oint_C \frac{d\mathbf{l}}{\sigma S} \quad (2.13)$$

La (2.10) mostra che, per avere corrente in un circuito è necessario, essendo sicuramente $R \neq 0$, che risulti diversa da zero la f.e.m. e cioè la circuitazione del campo impresso. Ne deriva il

carattere “non conservativo” del campo impresso \mathbf{E}_i e la necessità che sia diverso da zero, almeno in qualche parte del circuito, al fine di ottenere la circolazione della corrente i .

Nelle regioni in cui $\mathbf{E}_i \neq 0$ si hanno fenomeni di conversione dell’energia da altre forme (chimica, nucleare, solare, eolica, termica, meccanica, potenziale idraulica, ecc.) in elettrica: in quelle regioni in cui $\mathbf{E}_i \neq 0$ agiscono quindi forze elettriche (specifiche) di origine non elettromagnetica. Questi campi di forza non vanno confusi con le forze elettriche di origine elettromagnetica (forza di Lorentz, forze coulombiane, forze indotte dalla variazione temporale di \mathbf{B}) le quali si manifestano anche nel vuoto.

I dispositivi all’interno dei quali hanno sede i suddetti fenomeni di conversione dell’energia, sono detti “generatori elettrici”. Poiché il campo impresso non è solitamente distribuito lungo tutto il circuito, ma la sua presenza è limitata alla regione ove è inserito il generatore che “alimenta” il circuito, l’integrale che definisce la f.e.m. può essere limitato solo a tale regione. Nel seguito, salvo precisazione contraria, si farà l’ipotesi che il campo impresso risulti sensibilmente indipendente dalla corrente i del circuito e dai fenomeni ad essa connessi. Nell’ambito di tale ipotesi (solitamente soddisfatta) la f.e.m. è una caratteristica intrinseca del generatore.

Legge di Ohm in forma locale

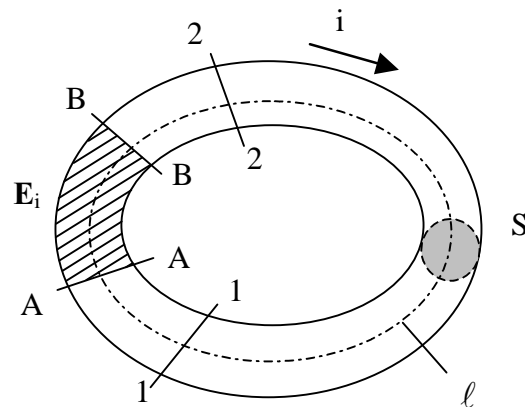
$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{J}}{\sigma}$$

Integrando lungo il circuito in figura, si ottiene:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\mathbf{J}\mathbf{S}}{\sigma\mathbf{S}} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{J}\mathbf{S}) \int_A^D \frac{d\mathbf{l}}{\sigma\mathbf{S}} = R i$$

\downarrow
 $=0$

e quindi $\Rightarrow e = R i$ (14)



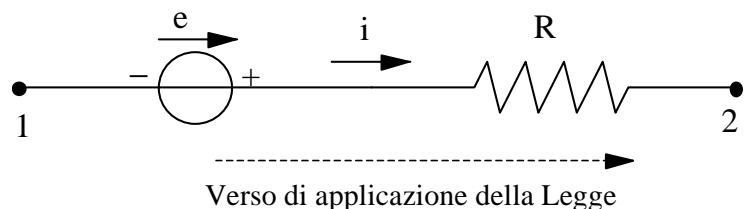
Per un tratto 1-2 di circuito si ha:

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_1^2 \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{J}\mathbf{S}) \int_1^2 \frac{d\mathbf{l}}{\sigma\mathbf{S}} \Rightarrow V_1 - V_2 + e = R_{1AB2} i$$
 (15)

Legge di ohm per un tratto di circuito

Generalizzando:

$$V_1 - V_2 \pm e = \pm R i$$
 (16)



Presenti il verso di applicazione della Legge e il verso positivo della corrente (entrambi scelti arbitrariamente)

- Il segno che precede e è positivo o negativo a seconda che e sia concorde o meno con il verso di applicazione
- Il segno che precede Ri è positivo o negativo a seconda che i sia concorde o meno con il verso di applicazione

EQUAZIONI DI KIRCHHOFF

Equazioni ai nodi (LKC)

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

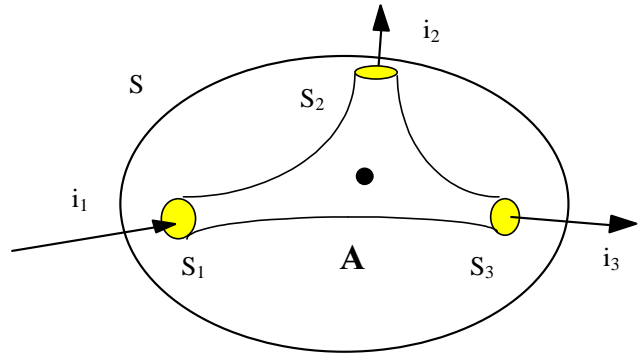
Facendo riferimento alla figura:

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad (17)$$

Generalizzando la (17)

$$\boxed{\sum i = 0} \quad (18) \quad \text{per ciascun nodo di una rete elettrica.}$$

La (18) si applica con l'intesa di assumere positivamente le correnti i cui versi positivi divergono dal nodo, negativamente le rimanenti.



Equazioni alle maglie (LKT)

Derivano dalle (16) [cioè da $\text{rot } \mathbf{E} = 0$].

Si consideri ad esempio la maglia indicata in figura. Per l'applicazione del secondo principio si fissano arbitrariamente:

- 1) i versi positivi delle correnti nei singoli rami;
- 2) un verso di applicazione della Legge (verso di percorrenza della maglia)

$$V_A - V_B + e_1 = R_1 i_1$$

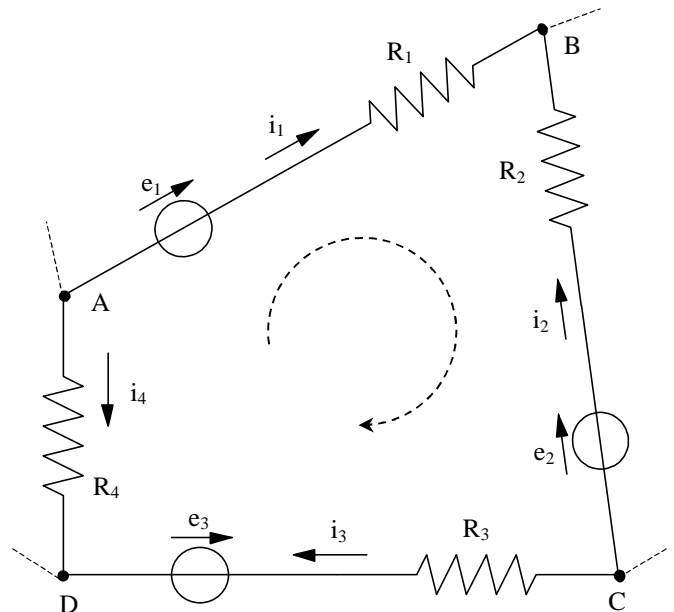
$$V_B - V_C - e_2 = -R_2 i_2$$

$$V_C - V_D - e_3 = R_3 i_3$$

$$V_D - V_A = -R_4 i_4$$

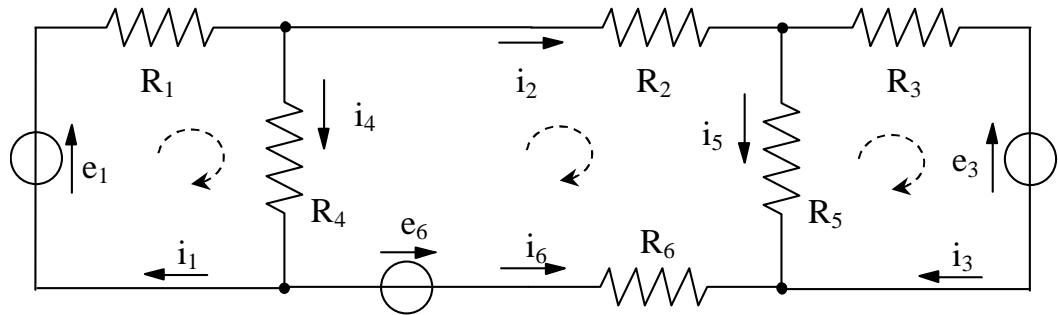
$$e_1 - e_2 - e_3 = R_1 i_1 - R_2 i_2 + R_3 i_3 - R_4 i_4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum e = \sum Ri} \quad (19)$$

La (19) si applica con l'intesa di assumere positivamente le "e" e le "i" se concordi con il verso di percorrenza della maglia.



I principi di Kirchhoff rappresentano un mezzo generale di soluzione dei circuiti.

Es.



$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = R_1 i_1 + R_4 i_4 \\ -e_6 = R_2 i_2 + R_5 i_5 - R_6 i_6 - R_4 i_4 \\ -e_3 = R_3 i_3 - R_5 i_5 \\ 0 = -i_1 + i_2 + i_4 \\ 0 = -i_2 + i_3 + i_5 \\ 0 = -i_3 - i_5 - i_6 \end{array} \right.$$

m equazioni alle maglie indipendenti
(in questo esempio $m = 3$)

$(n - 1)$ equazioni ai nodi (indipendenti)
(in questo esempio $n = 4$)

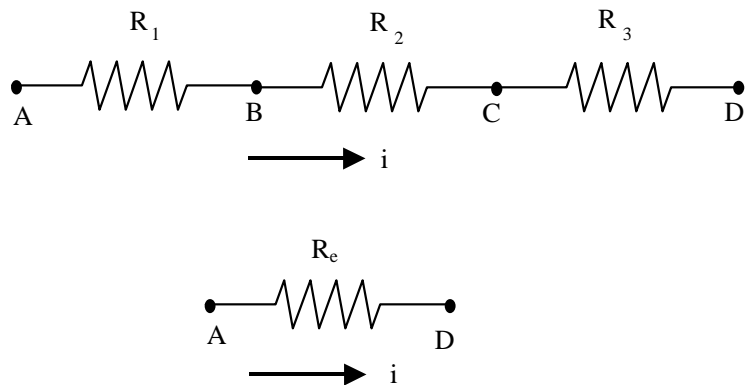
Detto $[r]$ il numero di rami vale la relazione
 $m = r - (n - 1)$

COLLEGAMENTI FRA RESISTENZE

Resistenze in serie

Il collegamento, indicato in figura, è tale che tutte le resistenze sono vincolate ad essere percorse dalla stessa corrente.

Il calcolo della resistenza equivalente (“sotto la stessa tensione è percorsa da uguale corrente”) è il seguente:



$$V_A - V_B = R_1 i$$

$$V_B - V_C = R_2 i$$

$$V_C - V_D = R_3 i$$

$$\overline{V_A - V_D = (R_1 + R_2 + R_3) i} \quad (20)$$

$$V_A - V_D = R_e i \quad (21)$$

Dal confronto della (20) con la (21) segue, generalizzando:

$$\boxed{R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_n} \quad (22)$$

Resistenze in parallelo

Il collegamento, indicato in figura, è tale che tutte le resistenze sono vincolate ad avere uguale tensione ai morsetti.

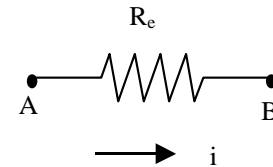
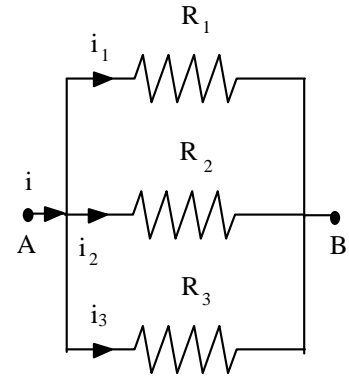
Il calcolo della resistenza equivalente (“sotto la stessa tensione è percorsa da uguale corrente”) è il seguente:

$$i_1 = \frac{1}{R_1} (V_A - V_B)$$

$$i_2 = \frac{1}{R_2} (V_A - V_B)$$

$$i_3 = \frac{1}{R_3} (V_A - V_B)$$

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) (V_A - V_B) \quad (23)$$

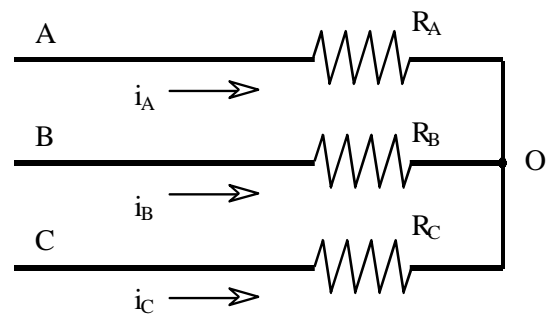
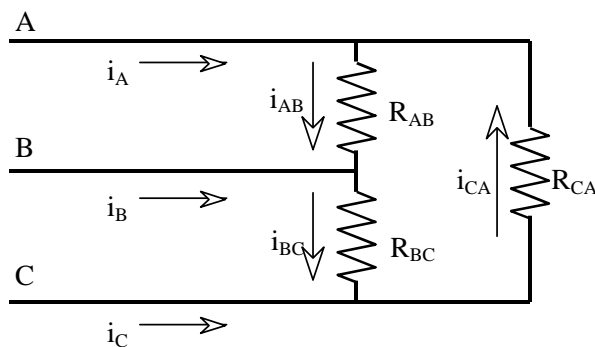


$$i = \frac{1}{R_e} (V_A - V_B) \quad (24)$$

Dal confronto della (23) con la (24) segue, generalizzando:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (25)$$

Trasformazioni triangolo - stella e stella - triangolo



Nella figura di sinistra sono mostrati tre resistori collegati a triangolo; nella figura di destra sono mostrati tre resistori collegati a stella. Entrambi i sistemi costituiscono un tripolo che viene collegato al circuito esterno attraverso i tre terminali A, B e C. Facendo uso delle Leggi di Kirchhoff e delle relazioni costitutive dei resistori è possibile dimostrare che, per quanto riguarda le correnti ai terminali (i_A , i_B e i_C), è possibile sostituire tre resistori collegati a stella con tre resistori, di resistenza opportuna, collegati a triangolo e viceversa. La sostituzione va intesa nel senso che qualunque sia il sistema di tensioni applicate ai terminali A, B e C il sistema di correnti assorbito dai due carichi è lo stesso. Con riferimento alle figure, le espressioni delle resistenze equivalenti per le trasformazioni stella - triangolo e triangolo - stella sono le seguenti (si è indicata con G la conduttanza, cioè l'inverso della resistenza R).

Triangolo - Stella

$$R_A = \frac{R_{AB} R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_B = \frac{R_{BC} R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_C = \frac{R_{CA} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

Stella - Triangolo

$$G_{AB} = \frac{G_A G_B}{G_A + G_B + G_C}$$

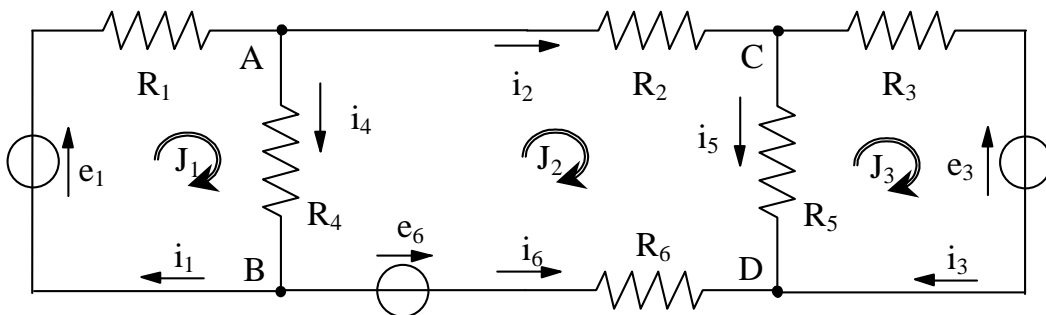
$$G_{BC} = \frac{G_B G_C}{G_A + G_B + G_C}$$

$$G_{CA} = \frac{G_C G_A}{G_A + G_B + G_C}$$

Metodi di soluzione dei circuiti elettrici

Metodo delle correnti di maglia

Questo metodo consente di ridurre il numero delle equazioni del sistema risolvibile, poiché vengono escluse le $(n - 1)$ equazioni ai nodi. Il metodo consiste nell'applicare soltanto il II principio di Kirchhoff assumendo come incognite non più le correnti effettive i_1, i_2, \dots dei singoli rami bensì un sistema di correnti fittizie come le J_1, J_2, \dots circolanti (secondo un verso arbitrario) entro ciascuna delle m maglie indipendenti della rete.



Nel caso dell'esempio di figura il sistema risolvibile è di sole tre equazioni:

$$\begin{cases} e_1 = R_1 J_1 + R_4 (J_1 - J_2) \\ -e_6 = R_2 J_2 + R_5 (J_2 - J_3) + R_6 J_2 - R_4 (J_1 - J_2) \\ -e_3 = R_3 J_3 - R_5 (J_2 - J_3) \end{cases}$$

Mentre le relazioni che legano le correnti effettive a quelle fittizie sono sei:

$$i_1 = J_1, \quad i_2 = J_2, \quad i_3 = J_3, \quad i_4 = J_1 - J_2, \quad i_5 = J_2 - J_3, \quad i_6 = -J_2$$

Metodo dei potenziali di nodo

Può essere considerato come il duale del precedente: vengono assunte come incognite della rete i potenziali degli n nodi della rete, riferiti ad uno qualsiasi di essi (cui può attribuirsi valore zero). Il metodo consiste nell'applicare ad $(n - 1)$ nodo il I principio di Kirchhoff, così da ottenere un sistema di $(n - 1)$ equazioni (fra loro indipendenti) le cui incognite sono i potenziali dei nodi diversi da quello di riferimento. L'applicazione del metodo viene semplificata se tutti i bipoli attivi vengono trasformati in "generatori di corrente" ed i bipoli passivi in "conduttanze".

$$\begin{cases} 0 = \frac{V_A - V_B - e_1}{R_1} + \frac{V_A - V_C}{R_2} + \frac{V_A - V_B}{R_4} \\ 0 = \frac{V_C - V_A}{R_2} + \frac{V_C - e_3}{R_3} + \frac{V_C}{R_5} \\ 0 = \frac{V_C - e_3}{R_3} + \frac{V_C}{R_5} + \frac{V_B + e_6}{R_6} \end{cases}$$

L'applicazione del metodo viene semplificata se tutti i bipoli attivi vengono trasformati in "generatori di corrente" ed i bipoli passivi in "conduttanze".

Nell'esempio considerato le incognite sono V_A, V_B e V_C dei nodi A, B, e C riferiti al nodo D ($V_D = 0$).