4. Soluzione di un circuito adinamico

Soluzione di un circuito. Circuiti ad una sola maglia. Circuiti riducibili ad una sola maglia attraverso serie e parallelo di resistenze. Trasformazioni stella-triangolo e triangolo-stella di resistenze. Trasformazioni stella poligono. Circuiti riducibili ad una sola maglia attraverso trasformazioni stella-triangolo e triangolo-stella di resistenze.
Circuiti non riducibili. Sistema risolvente completo di un circuito adinamico. Circuiti patologici. Maglie di generatori di tensione indipendenti. Tagli di generatori di corrente indipendenti. Patologie dovute a generatori pilotati. Proprietà di sostituzione.

Soluzione di un circuito

Per determinare il sistema risolvente di un circuito a R rami e N nodi occorre

1. Individuare le R correnti e le R tensioni incognite che si stabiliscono nel circuito
2. Individuare le R equazioni topologiche indipendenti ($(N-1)$ LKC e $R-(N-1)$ LKT)
3. Aggiungere alle precedenti R equazioni topologiche le R relazioni costitutive dei componenti

Per effettuare senza ambiguità i passaggi (1) e (2), soprattutto in presenza di circuiti complessi, è opportuno adoperare il grafo del circuito

incognite

R correnti di ramo (**i**)
R tensioni di ramo (**v**)

$2R$ incognite

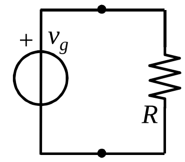
equazioni

$$2R \text{ equazioni} \begin{cases} R \text{ eq.} & \begin{cases} \mathbf{T\,i = 0} & \leftarrow N-1 \text{ LKC} \\ \mathbf{L\,v = 0} & \leftarrow R-(N-1) \text{ LKT} \end{cases} \\ R \text{ eq.} & \mathbf{f(i, v) = 0} \leftarrow R \text{ Rel. cost. comp.} \end{cases}$$

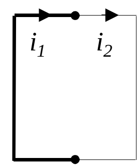
Le relazioni costitutive debbono essere compatibili con le equazioni topologiche, ossia esse non debbono nè violare nè replicare le LKC e le LKT.

Esempio: sistema risolvente di un circuito ad una sola maglia fondamentale

Si considera il circuito di figura, costituito da due bipoli in parallelo



Si introduce il grafo del circuito. Questo è costituito da una sola maglia elementare fatta da due rami afferenti a due nodi (R=2, N=2). Si introduce un nome e un verso per le correnti. Si assume che i versi delle tensioni siano associati a quelli delle correnti secondo la convenzione dell'utilizzatore. In questo modo non è necessario indicare esplicitamente le tensioni sul disegno. Si introduce quindi una suddivisione del grafo in albero e coalbero



Si scrivono le equazioni topologiche:

2 (R) equazioni { 1 (NJ1) LKC → ; 1 (R J (NJ1)) LKT →

Si aggiungono le relazioni costitutive dei due bipoli

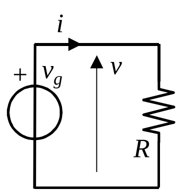
2 (R) equazioni { ramo 1 → ; ramo 2 →

$$\begin{cases} i_1 - i_2 = 0 \\ v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 = -v_g \\ v_2 - R\,i_2 = 0 \end{cases}$$

Si è ottenuto così un sistema di 4 equazioni nelle 4 incognite i_1, v_1, i_2, v_2

La soluzione è $i_2 = i_1 = v_g / R$ e $v_2 = v_1 = v_g$

I circuiti ad una sola maglia costituita da un generatore indipendente di tensione o di corrente e da un resistore ammettono una soluzione immediata che può essere ottenuta senza applicare la procedura sistematica.

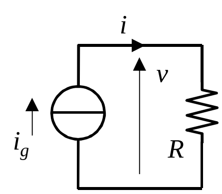


$$v = v_g$$

$$i = \frac{v}{R} = \frac{v_g}{R}$$

$$p_{aR} = v\,i = \frac{v_g^2}{R}$$

$$p_{ag} = -v\,i = -p_{aR}$$



$$i = i_g$$

$$v = R\,i = R\,i_g$$

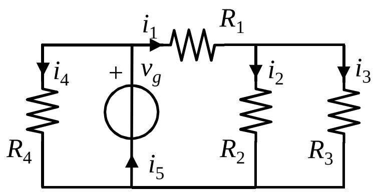
$$p_{aR} = v\,i = R i_g^2$$

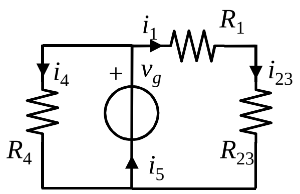
$$p_{ag} = -v\,i = -p_{aR}$$

In entrambi i casi la potenza complessivamente assorbita da tutti i componenti del circuito risulta nulla, come prescritto dal teorema di Tellegen. Ciò comporta che la potenza fisicamente assorbita dal resistore è erogata, in ogni istante, dal generatore.

Circuiti riducibili una sola maglia mediante serie e parallelo di resistenze

Molti circuiti di interesse applicativo contengono solo resistori ed un solo generatore indipendente. Spesso tali circuiti possono essere ridotti a circuiti equivalenti ad una sola maglia elementare mediante trasformazioni di resistenze in serie e parallelo





trasformazioni delle resistenze

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

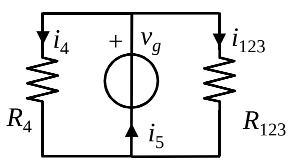
ricostruzione delle correnti

$$\boxed{i_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} i_1}$$

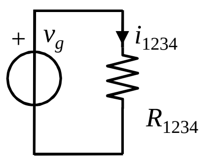
$$\boxed{i_3 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} i_1}$$

$$i_{23} = i_{123}$$

$$\boxed{i_1 = i_{123}}$$



$$R_{123} = R_1 + R_{23}$$



$$R_{1234} = \frac{R_{123} R_4}{R_{123} + R_4}$$

$$i_{1234} = \frac{v_g}{R_{1234}} \longrightarrow$$

$$i_{123} = \frac{R_4}{R_{123} + R_4} i_5$$

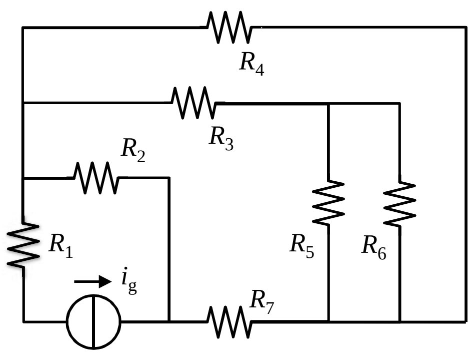
$$\boxed{i_4 = \frac{R_{123}}{R_{123} + R_4} i_5}$$

$$\boxed{i_5 = i_{1234}}$$

Utilizzando le trasformazioni di resistenze in serie e parallelo si riduce il circuito ad una sola maglia e si calcola la corrente che circola in questa. Ripercorrendo a ritroso tutte le trasformazioni di resistenze introdotte si calcola la corrente in ogni ramo del circuito originale.

Esercizio 4.1

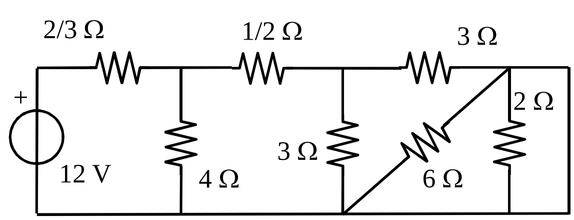
Risolvere il circuito di figura mediante riduzione ad una sola maglia. Determinare inoltre la potenza assorbita da ciascuna resistenza.



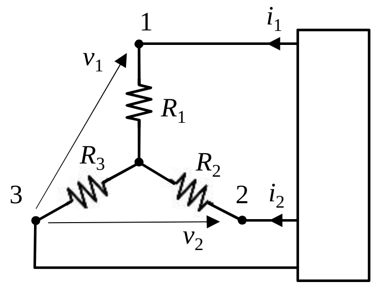
$R_1 = 1/2\ \Omega$
$R_2 = 3\ \Omega$
$R_3 = 4/3\ \Omega$
$R_4 = 2\ \Omega$
$R_5 = 2\ \Omega$
$R_6 = 1\ \Omega$
$R_7 = 2\ \Omega$
$i_g = 5\ \text{A}$

Esercizio 4.2

Risolvere il circuito di figura mediante riduzione ad una sola maglia . Determinare inoltre la potenza complessivamente assorbita dalle resistenze.



Trasformazioni stella-triangolo



Tre resistori si dicono collegati a stella se posseggono un nodo in comune e non formano una maglia

Se si esclude la possibilità di accedere al nodo comune i tre resistori a stella costituiscono un tripolo, rappresentabile attraverso le correnti i_1 e i_2 e le tensioni v_1 e v_2 indicate in figura

Le tensioni a cui sono soggetti i tre resistori a stella all'interno del circuito sono

$$\begin{cases} v_1 = R_1\, i_1 + R_3\left(i_1 + i_2\right) \\ v_2 = R_2\, i_2 + R_3\left(i_1 + i_2\right) \end{cases}$$

che riscriviamo come

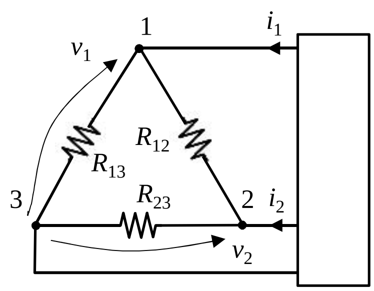
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

e infine

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\,\mathbf{i}$$

Note le correnti è dunque possibile dedurre le tensioni ai capi della stella. È altresì possibile dedurre le correnti dalle tensioni attraverso la relazione

$$\mathbf{i} = \mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{v}$$



Tre resistori si dicono collegati a triangolo se formano una maglia

I tre resistori costituiscono un tripolo rappresentabile attraverso le correnti i_1 e i_1 e le tensioni v_1 e v_1 indicate in figura

Le correnti che i tre resistori a triangolo assorbono dal circuito sono

$$\begin{cases} i_1 = \dfrac{v_1}{R_{13}} + \dfrac{v_1 - v_2}{R_{12}} \\[2ex] i_2 = \dfrac{v_2}{R_{23}} + \dfrac{v_2 - v_1}{R_{12}} \end{cases}$$

che riscriviamo come

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{R_{12}} + \dfrac{1}{R_{13}} & -\dfrac{1}{R_{12}} \\[2ex] -\dfrac{1}{R_{12}} & \dfrac{1}{R_{12}} + \dfrac{1}{R_{23}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

e infine

$$\mathbf{i} = \mathbf{G}\,\mathbf{v}$$

Note le correnti è dunque possibile dedurre e tensioni ai capi della stella. È altresì possibile dedurre le correnti dalle tensioni attraverso la relazione

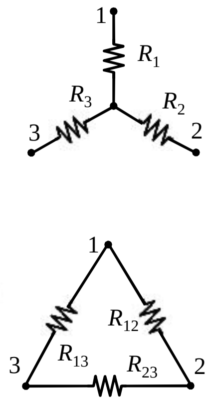
$$\mathbf{v} = \mathbf{G}^{-1}\,\mathbf{i}$$

resistori a stella	$\mathbf{v} = \mathbf{R}\,\mathbf{i}$	$\mathbf{i} = \mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{v}$	si deduce quindi che le due terne di resistori a stella o a triangolo sono equivalenti nei confronti del circuito esterno se sussiste la relazione $\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1}$
resistori a triangolo	$\mathbf{v} = \mathbf{G}^{-1}\,\mathbf{i}$	$\mathbf{i} = \mathbf{G}\,\mathbf{v}$	

Attraverso semplici (ma laboriosi) passaggi è possibile verificare che tale relazione sussiste se

trasformazioni stella-triangolo

$$\begin{cases} G_{12} = \dfrac{G_1\,G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \\ G_{13} = \dfrac{G_1\,G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \\ G_{23} = \dfrac{G_2\,G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \end{cases}$$

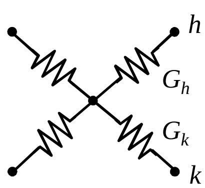


trasformazioni triangolo-stella

$$\begin{cases} R_1 = \dfrac{R_{12}\,R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \\ R_2 = \dfrac{R_{12}\,R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \\ R_3 = \dfrac{R_{13}\,R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \end{cases}$$

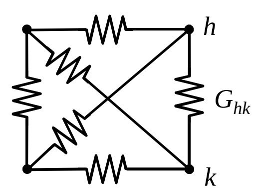
Tre resistori a stella possono essere sostituiti con tre resistori equivalenti a triangolo (e viceversa) senza che questo produca alcun effetto sul circuito esterno

Trasformazioni stella-poligono



trasformazioni stella-poligono

$$G_{hk} = G_h\,G_k \Big/ \sum_{h=1}^{N} G_h$$



N resistori formano una stella di resistori a N nodi se congiungono ciascuno degli N nodi ad un ulteriore nodo comune per tutti

$N\,(N-1)$ / 2 formano una poligono di resistori a N nodi se congiungono ciascuna coppia di nodi

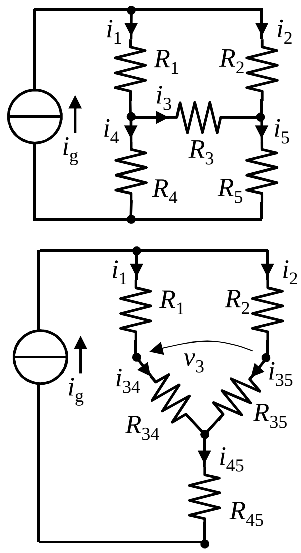
È possibile dimostrare che una stella di resistori a N nodi può essere sostituita con un poligono di resistori a N nodi senza che nulla cambi nel circuito esterno purché risulti

$$G_{hk} = \frac{G_h\,G_k}{\sum_{h=1}^{N} G_h}$$

Non sussiste il viceversa, nel senso che dato un poligono a N nodi non è possibile determinare una stella a N nodi equivalente (si noti che per N >3 i resistori della stella sono in numero minore rispetto a quelli del poligono)

Circuiti riducibili ad una sola maglia mediante trasformazioni stella-triangolo

Adoperando le trasformazioni stella triangolo e/o triangolo stella è spesso possibile ridurre ad una sola maglia reti complesse di resistori alimentate da un unico generatore



trasformazioni delle resistenze

$$R_{34} = \frac{R_3\,R_4}{R_3 + R_4 + R_5}$$

$$R_{35} = \frac{R_3\,R_5}{R_3 + R_4 + R_5}$$

$$R_{45} = \frac{R_4\,R_5}{R_3 + R_4 + R_5}$$

ricostruzione delle correnti

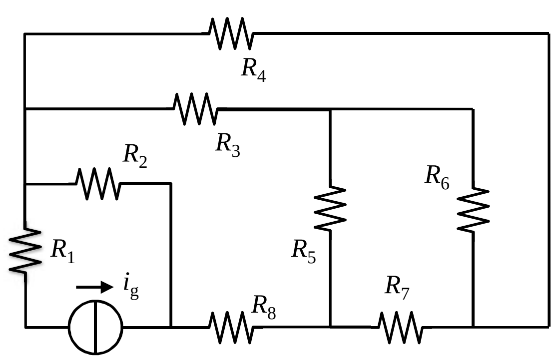
$$\boxed{i_1 = \frac{R_2 + R_{35}}{R_1 + R_{34} + R_2 + R_{35}}\,i_g \qquad i_2 = i_g - i_1}$$

$$i_{34} = i_1$$
$$i_{35} = i_2$$
$$v_3 = R_{34}\,i_{34} - R_{35}\,i_{35}$$

$$\boxed{i_3 = \frac{v_3}{R_3}} \qquad \boxed{i_4 = i_1 - i_3} \qquad \boxed{i_5 = i_2 + i_3}$$

Esercizio 4.3

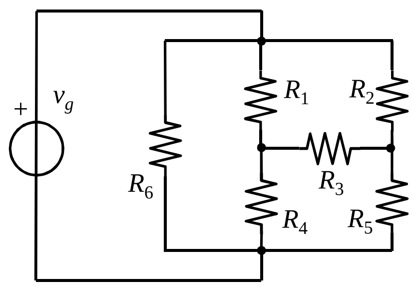
Risolvere il circuito di figura mediante riduzione ad una sola maglia



$R_1 = 1\ \Omega$
$R_2 = 4\ \Omega$
$R_3 = 2\ \Omega$
$R_4 = 2\ \Omega$
$R_5 = 2\ \Omega$
$R_6 = 1\ \Omega$
$R_7 = 2\ \Omega$
$R_8 = 2\ \Omega$
$i_g = 6\ \text{A}$

Esercizio 4.4

Risolvere il circuito di figura mediante riduzione ad una sola maglia



$R_1 = 1\ \Omega$
$R_2 = 0.5\ \Omega$
$R_3 = 2\ \Omega$
$R_4 = 1\ \Omega$
$R_5 = 0.5\ \Omega$
$R_6 = 2\ \Omega$
$v_g = 12$ V

Soluzione generale di un circuito adinamico

In presenza di più generatori (indipendenti o pilotati) è spesso impossibile ridurre il circuito ad una sola maglia. Per risolvere un circuito non riducibile, avente in generale R rami ed N nodi, è necessario individuare il sistema risolvente. A tal fine è necessario

1. Individuare le R correnti e le R tensioni incognite che si stabiliscono nel circuito
2. Individuare le R equazioni topologiche indipendenti ((NJ1) LKC e R J (NJ1) LKT)
3. Aggiungere alle precedenti R equazioni topologiche le R relazioni costitutive dei componenti

Per effettuare senza ambiguità i passaggi (1) e (2), soprattutto in presenza di circuiti complessi contenenti anche componenti multipolari, è opportuno adoperare il grafo del circuito

incognite

R correnti di ramo (**i**)
R tensioni di ramo (**v**)

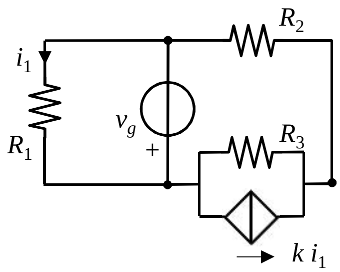
$2R$ incognite

equazioni

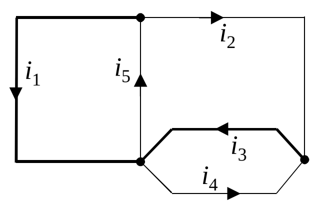
$2R$ equazioni

R eq.: **T i = 0** ← NJ1 LKC; **L v = 0** ← R – (NJ1) LKT

R eq.: **f (i , v) = 0** ← R Rel. cost. comp. compatibili con le equazioni topologiche



Si considera a titolo di esempio il circuito di figura



correnti di albero i_3, i_5
correnti di coalbero i_1, i_2, i_4

Si introduce il grafo del circuito. Questo è costituito da 5 rami afferenti a 3 nodi (R=5, N=3). Si introduce un nome e un verso per le correnti. Si assume che i versi delle tensioni siano associati a quelli delle correnti secondo la convenzione dell'utilizzatore. In questo modo non è necessario indicare esplicitamente le tensioni sul disegno. Si introduce quindi una suddivisione del grafo in albero e coalbero

si introducono le equazioni topologiche

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_5 = 0 \\ i_3 - i_2 - i_4 = 0 \end{cases}$$

$NJ1$ LKC

$$\begin{cases} v_5 + v_1 = 0 \\ v_2 + v_3 - v_1 = 0 \\ v_4 + v_3 = 0 \end{cases}$$

$R-(NJ1)$ LKT

Si introducono le relazioni costitutive dei componenti

$$\begin{cases} v_1 - R_1\, i_1 = 0 \\ v_2 - R_2\, i_2 = 0 \\ v_3 - R_3\, i_3 = 0 \\ i_4 - k\, i_1 = 0 \\ v_5 = v_g \end{cases}$$

R Rel. cost. comp.

È opportuno che le eventuali correnti e tensioni impresse da generatori indipendenti siano riportate a destra in queste equazioni in modo da evidenziarne il ruolo di forzanti (termini noti).

$2R$ equazioni

$2R$ incognite: R correnti (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) , R tensioni (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)

Il sistema così ottenuto consente di determinare tutte le correnti (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) e tutte le tensioni (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) di interesse del circuito. È opportuno evidenziare i seguenti fatti

1. tra tutte le equazioni che compongono il sistema risolvente solo le relazioni costitutive relative ai generatori di tensione o di corrente indipendenti sono non omogenee (nel caso in esame la tensione v_g impressa dal generatore indipendente compare nel sistema nel ruolo di forzante (termine noto)). In generale il vettore delle forzanti (termini noti del sistema risolvente) è nullo se nel circuito non agiscono generatori indipendenti. In tal caso tutte le correnti e le tensioni del circuito risultano conseguentemente nulle.

> Un circuito adinamico che non contiene generatori indipendenti è necessariamente spento, anche se al suo interno sono presenti generatori pilotati.

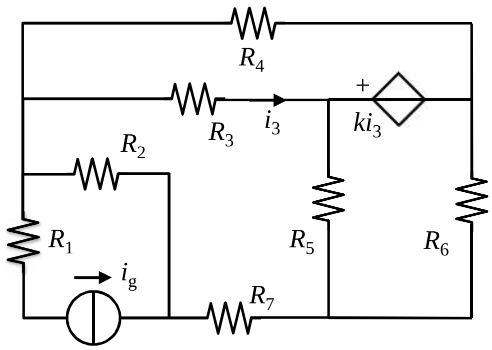
2. La soluzione del circuito nel generico istante *t* dipende solo dal valore che il vettore delle grandezze impresse assume in quell'istante. Per calcolarla non è necessario disporre di alcuna informazione ulteriore relativa al valore delle grandezze elettriche negli istanti precedenti.

> Un circuito adinamico alimentato da generatori variabili nel tempo può essere considerato come una successione di circuiti alimentati da generatori stazionari.

3. Essendo un circuito adinamico un sistema energeticamente isolato in esso esiste almeno un componente che eroga potenza e almeno un componente che la assorbe (Teorema di Tellegen). Se sono presenti generatori pilotati il componente che eroga potenza non è necessariamente un generatore indipendente (anche nel caso in cui ce ne sia uno solo senza del quale il circuito sarebbe spento)

Esercizio 4.5

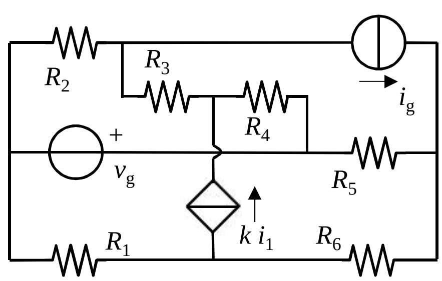
Impostare il sistema risolvente completo e risolvere il circuito di figura. Verificare inoltre il bilancio delle potenze.



$R_1 = 1/2\ \Omega$
$R_2 = 3\ \Omega$
$R_3 = 5/3\ \Omega$
$R_4 = 2\ \Omega$
$R_5 = 2\ \Omega$
$R_6 = 1\ \Omega$
$R_7 = 2\ \Omega$
$k = 0.5\ \Omega$
$i_g = 5\ \text{A}$

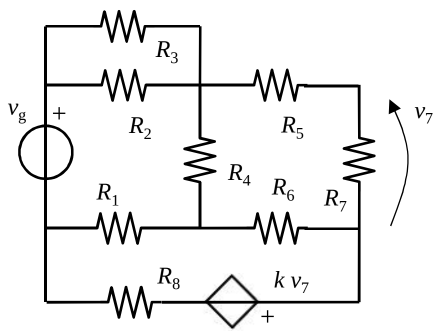
Esercizio 4.6

Impostare il sistema risolvente del circuito di figura



Esercizio 4.7

Impostare il sistema risolvente completo e risolvere il circuito di figura agli istanti t = 0 ms, t = 0.25 ms e t = 0.5 ms.



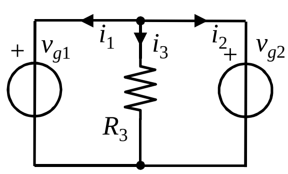
R_1 = 2 kΩ
R_2 = 1 kΩ
R_3 = 0.5 kΩ
R_4 = 2 kΩ
R_5 = 1 kΩ
R_6 = 3 kΩ
R_7 = 3 kΩ
R_8 = 1 kΩ
k = – 1.5
V_{max} = 5 V
T = 1 ms

$$v_g = V_{\max}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Circuiti patologici (o non ammissibili)

Le relazioni costitutive essere compatibili con le equazioni topologiche, ossia esse non debbono nè violare nè replicare le LKC e le LKT. Se ciò non accade il circuito è detto patologico (o non ammissibile). La sua soluzione risulta impossibile o indeterminata

Si consideri il seguente esempio



$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ v_3 - v_1 = 0 \\ v_2 - v_1 = 0 \\ v_1 = v_{g1} \\ v_2 = v_{g2} \\ v_3 = R_3\, i_3 \end{cases}$$

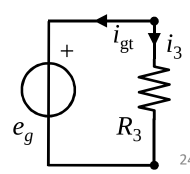
La seconda LKT stabilisce un vincolo algebrico tra le tensioni impresse dai generatori.

$$v_2 - v_1 = 0 \Leftrightarrow v_{g2} - v_{g1} = 0$$

Se $v_{g2} \neq v_{g1}$ tale vincolo risulta violato e il circuito risulta impossibile.

Se invece $v_{g2} = v_{g1}$ allora il vincolo è identicamente soddisfatto. Una delle due relazioni costitutive può essere ottenuta dall'altra in combinazione con le LKT e può quindi essere eliminata dal sistema risolvente. Si hanno quindi 5 equazioni nelle 6 incognite i_1, i_2, i_3, v_1, v_2, v_3.

Si noti che i_3 è comunque determinabile. L'indeterminazione del circuito può essere eliminata se si introduce una nuova variabile $i_{gt} = i_1 + i_2$, ossia se si rinuncia al dettaglio della ripartizione di corrente tra i due generatori ma ci si limita alla loro corrente complessiva. Ciò equivale a concepire i due generatori compatibili in parallelo come un unico generatore con tensione impressa $e_g = e_{g1} = e_{g2}$
.



In termini più generali se le relazioni topologiche impongono uno o più vincoli tra le grandezze impresse (tensioni o correnti) allora la matrice dei coefficienti del sistema risolvente è singolare e dunque non ha rango massimo. Se le grandezze impresse sono tali da non soddisfare i vincoli già imposti dalle LKC e LKT allora la matrice completa ha rango massimo e il sistema risulta quindi impossibile. Se invece le grandezze impresse sono tali da soddisfare identicamente i vincoli già imposto dalle equazioni topologiche allora anche la matrice completa non ha rango massimo e il sistema risulta indeterminato.

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_{g1} \\ v_{g2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A\,x = b}$$

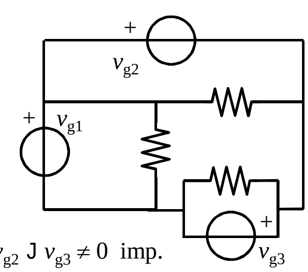
rango ($\mathbf{A}$) = 5

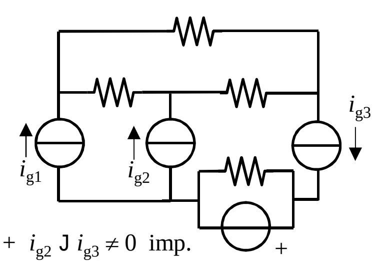
rango ([$\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$]) = 6 se $v_{g2} \neq v_{g1}$ sistema impossibile

rango ([$\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$]) = 5 se $v_{g2} = v_{g1}$ sistema indeterminato

In generale affinché le relazioni costitutive siano compatibili con le equazioni topologiche è necessario (ma non sufficiente) che

1. non esistano maglie formate da soli generatori di tensione indipendenti (e cortocircuiti)
2. non esistano tagli formati da soli generatori di corrente indipendenti (e circuiti aperti)





v_{g1} J v_{g2} J $v_{g3} \neq 0$ imp.

v_{g1} J e_{g2} J $v_{g3} = 0$ indet.

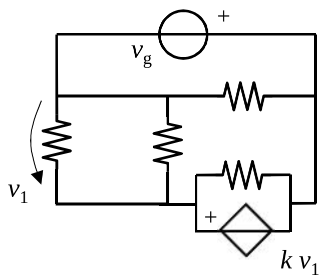
i_{g1} + i_{g2} J $i_{g3} \neq 0$ imp.

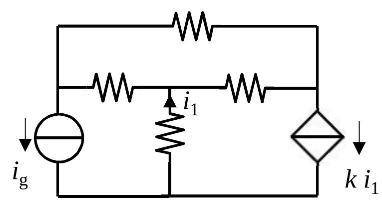
i_{g1} + i_{g2} J $i_{g3} = 0$ indet.

Nel comporre il modello circuitale di un sistema reale occorre evitare di creare maglie o tagli patologici.

In generale all'interno di un circuito indeterminato molte delle tensioni e delle correnti possono essere calcolate. L'indeterminazione su tutto il circuito può essere eliminata sostituendo uno dei generatori di tensione della maglia patologica con un circuito aperto e uno dei generatori di corrente del taglio patologico con un corto circuito. Ciò non ha nessun effetto sulla restante parte del circuito.

In presenza di generatori pilotati le eventuali incompatibilità tra relazioni costitutive ed equazioni topologiche possono risultare non evidenti come le precedenti e possono altresì manifestarsi per particolari valori del parametro di controllo





LKT: $v_1\,(1 \text{ J } k) = v_g$

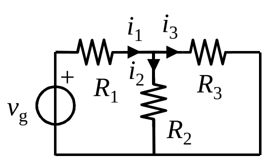
$k = 1,\ v_g \neq 0,$	imp.
$k = 1,\ v_g = 0,$	indet.
$k \neq 1$	non patologico

LKC: $i_1\,(1 \text{ J } k) = i_g$

$k = 1,\ i_g \neq 0,$	imp.
$k = 1,\ i_g = 0,$	indet.
$k \neq 1$	non patologico

Proprietà di sostituzione

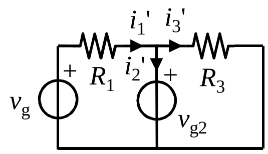
Si consideri a titolo di esempio il circuito di figura di cui si riportano il sistema risolvente e la soluzione in termini di correnti e tensioni di ramo.



$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 + v_3 = 0 \\ v_1 = -v_g + R_1\, i_1 \\ v_2 = R_2\, i_2 \\ v_3 = R_3\, i_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 = \dfrac{v_g}{R_1 + \dfrac{R_2\,R_3}{R_2 + R_3}}; \quad i_2 = \dfrac{v_g}{R_1 + \dfrac{R_2\,R_3}{R_2 + R_3}} \dfrac{R_3}{R_2 + R_3}; \quad i_3 = \dfrac{v_g}{R_1 + \dfrac{R_2\,R_3}{R_2 + R_3}} \dfrac{R_2}{R_2 + R_3}; \\ v_1 = \dfrac{-R_2\,R_3}{R_1\,R_2 + R_1\,R_3 + R_2\,R_3} v_g; \quad v_2 = \dfrac{R_2\,R_3}{R_1\,R_2 + R_1\,R_3 + R_2\,R_3} v_g; \quad v_3 = \dfrac{R_2\,R_3}{R_1\,R_2 + R_1\,R_3 + R_2\,R_3} v_g; \end{cases}$$

Si consideri ora il circuito ottenuto dal precedente sostituendo al resistore R_2, posto sul secondo ramo, un generatore di tensione la cui tensione è proprio la tensione v_2 agente ai capi del ramo. Questo nuovo circuito ammette la soluzione i_1', i_2', i_3', v_1', v_2', v_3'.



$$v_{g2} = v_2 = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} v_g$$

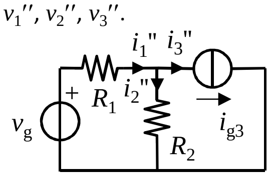
$$\begin{cases} i_1' + i_2' - i_3' = 0 \\ v_1' + v_2' = 0 \\ v_1' + v_3' = 0 \\ v_1' = -v_g + R_1 i_1' \\ v_2' = v_{g2} \\ v_3' = R_3 i_3' \end{cases}$$

Le correnti e le tensioni nei rami circuito originale soddisfano necessariamente il sistema risolvente del nuovo circuito. Infatti l'equazione del generatore di tensione introdotto è soddisfatta per ipotesi e le altre sono soddisfatte perché sono immutate. I due circuiti ammettono dunque la medesima soluzione. In altri termini, la sostituzione del resistore R_2 con un generatre di tensione non ha effetti sul resto del circuito.

$$\begin{cases} i_1' = i_1; \quad i_2' = i_3; \quad i_3' = i_3; \\ v_1' = v_g; \quad v_2' = v_2; \quad v_3' = v_3; \end{cases}$$

29

Analogamente, si consideri ora il circuito ottenuto da quello originale sostituendo al resistore R_3, posto sul terzo ramo, un generatore di corrente la cui corrente è proprio la corrente i_3 che circola nel ramo. Questo nuovo circuito ammette la soluzione i_1'', i_2'', i_3'', v_1'', v_2'', v_3''.



$$i_{g3} = i_3 = \frac{v_g}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

$$\begin{cases} i_1'' + i_2'' - i_3'' = 0 \\ v_1'' + v_2'' = 0 \\ v_1'' + v_3'' = 0 \\ v_1'' = -v_g + R_1 i_1'' \\ v_2'' = R_2 i_2'' \\ i_3'' = i_{g3} \end{cases}$$

Le correnti e le tensioni nei rami del circuito precedente soddisfano necessariamente il sistema risolvente del nuovo circuito. Infatti l'equazione del generatore di corrente introdotto è soddisfatta per ipotesi e le altre sono soddisfatte perché sono immutate. I due circuiti ammettono dunque la medesima soluzione. In altri termini, la sostituzione del resistore R_3 con un generatre di corrente non ha effetti sul resto del circuito.

$$\begin{cases} i_1'' = i_1; \quad i_2'' = i_3; \quad i_3'' = i_3; \\ v_1'' = v_g; \quad v_2'' = v_2; \quad v_3'' = v_3; \end{cases}$$

30

Possiamo quindi enunciare la seguente **proprietà di sostituzione**:

> Sia dato un circuito qualsiasi avente una data soluzione in termini di correnti e tensioni di ramo. Il circuito ottenuto sostituendo uno qualsiasi dei suoi rami con un generatore di corrente/tensione la cui corrente/tensione impressa coincide con la corrente/tensione di ramo ammette la medesima soluzione.

La proprietà di sostituzione non dipende dalla natura dei componenti. La sua validità è del tutto generale. In particolare si applica sia ai circuiti lineari che a quelli non lineari.

Più in generale la proprietà di sostituzione può essere enunciata come segue: Sia dato un circuito qualsiasi avente una data soluzione in termini di correnti e tensioni di ramo. Il circuito ottenuto sostituendo un numero qualsiasi di rami con un generatore di corrente/tensione la cui corrente/tensione impressa coincide con la corrente/tensione di ramo ammette la medesima soluzione purché in esso non si verifichino tagli di generatori di corrente o maglie di generatori di tensione. Ciò equivale a dire che nel sistema risolvente è possibile sostituire (con delle assegnazioni) un numero qualsiasi di relazioni di definizione dei componenti purché queste non replichino le equazioni topologiche. In generale individuata una scomposizione del grafo in albero e coalbero è possibile sostituire tutti i rami del coalbero con dei generatori di corrente e tutti quelli dell'albero con dei generatori di tensione. Il circuito così ottenuto ammette la medesima soluzione.