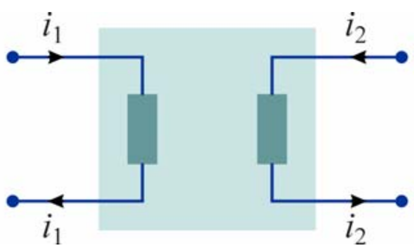
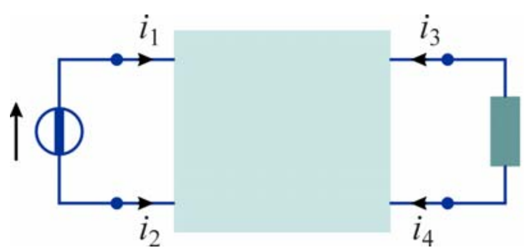
Doppi bipoli

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 21-11-2012)

Doppi bipoli (o 2-porte)

- **Doppi bipoli:** componenti con due copie di terminali (**porte**) tali che, per ciascuna coppia, la corrente entrante in uno dei terminali è uguale a quella uscente dall'altro
- Doppio bipolo **intrinseco**:
  - il vincolo tra le correnti dei terminali di ciascuna porta è determinato dalla struttura interna del componente
- Doppio bipolo **non intrinseco**:
  - il vincolo tra le correnti è dovuto al modo in cui il componente viene collegato

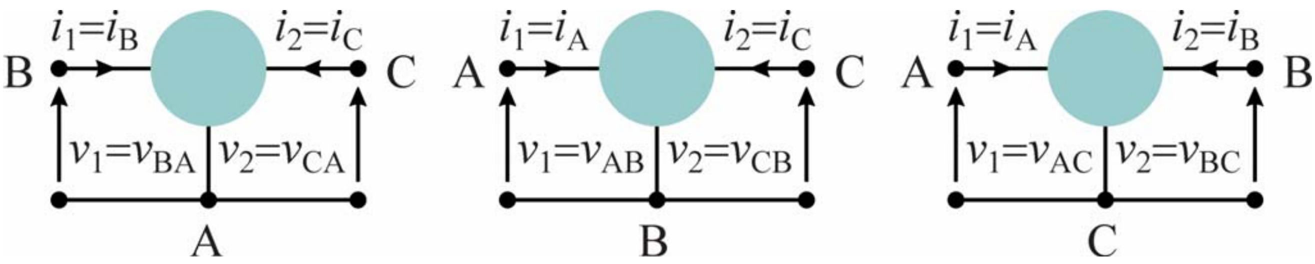




$$i_2 = -i_1$$
$$i_4 = -i_3$$

Rappresentazioni di un tripolo come doppio bipolo

- Un tripolo può essere considerato come un doppio bipolo con i terminali negativi delle porte collegati tra loro
- Le tensioni e le correnti utilizzate per caratterizzare il componente e le espressioni delle equazioni caratteristiche dipendono dalla scelta del **terminale comune**

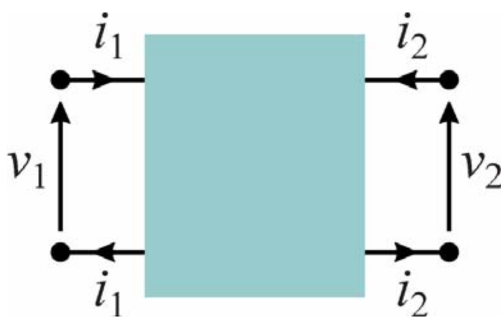


Doppi bipoli resistivi

- Le equazioni di un doppio bipolo resistivo sono del tipo

$$f_1\left[v_1(t), v_2(t), i_1(t), i_2(t), t\right] = 0$$
$$f_2\left[v_1(t), v_2(t), i_1(t), i_2(t), t\right] = 0$$

f_1, f_2 = funzioni generiche



- Se il tempo non compare esplicitamente come argomento di f_1 e f_2 il componente è detto **tempo-invariante**

Doppi bipoli resistivi lineari tempo-invarianti

- Per un doppio bipolo resistivo **lineare** e **tempo-invariante** le equazioni, nel caso generale, sono del tipo

$$a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + b_{11}i_1 + b_{12}i_2 = 0$$

$$a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + b_{21}i_1 + b_{22}i_2 = 0$$

a_{ij}, b_{ij} $(i, j = 1, 2)$ rappresentano delle costanti reali

- Queste equazioni possono essere espresse nella forma

$$\mathbf{Av} + \mathbf{Bi} = \mathbf{0}$$

dove

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

- Quando è possibile esplicitare due delle variabili in funzioni delle rimanenti si possono avere altre forme particolari delle equazioni

Rappresentazioni di un doppio bipolo

Rappresentazione	Variabili indipendenti	Variabili dipendenti
Comandata in corrente	i_1, i_2	v_1, v_2
Comandata in tensione	v_1, v_2	i_1, i_2
Ibrida (diretta)	i_1, v_2	v_1, i_2
Ibrida inversa	v_1, i_2	i_1, v_2
Trasmissione (diretta)	$v_2, -i_2$	v_1, i_1
Trasmissione inversa	$v_1, -i_1$	v_2, i_2

Matrice di resistenza

- Per un doppio bipolo comandato in corrente le equazioni possono essere poste nella forma

$$v_1 = r_{11} i_1 + r_{12} i_2$$

$$v_2 = r_{21} i_1 + r_{22} i_2$$

cioè

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{i}$$

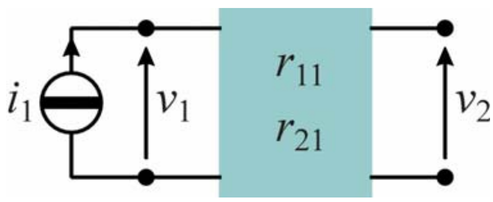
dove

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{R}$ = **matrice di resistenza**
- Per comprendere il significato dei parametri, si considerano le condizioni di funzionamento in cui una delle variabili indipendenti viene azzerata (mentre l'altra assume un valore arbitrario $\neq 0$)

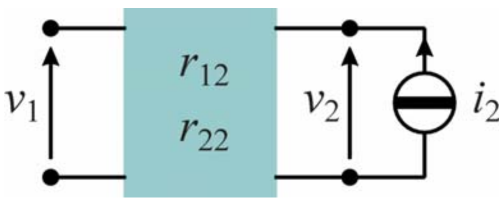
Significato dei parametri di resistenza

$$r_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{i_2=0} \qquad r_{21} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{i_2=0}$$



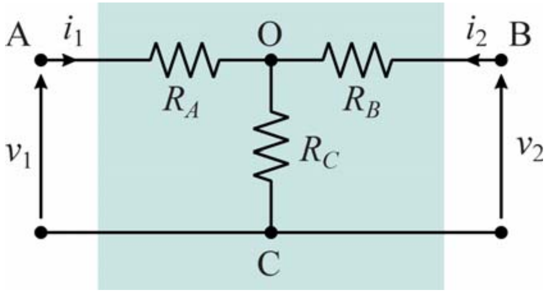
- r_{11} = resistenza di ingresso a vuoto alla porta 1
- r_{21} = resistenza di trasferimento a vuoto dalla porta 1 alla porta 2

$$r_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{i_1=0} \qquad r_{12} = \left.\frac{v_1}{i_2}\right|_{i_1=0}$$

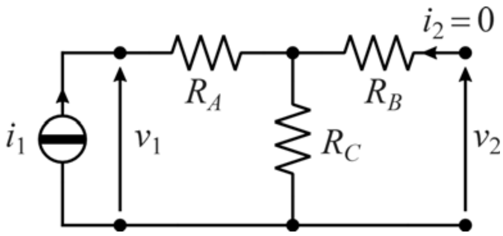


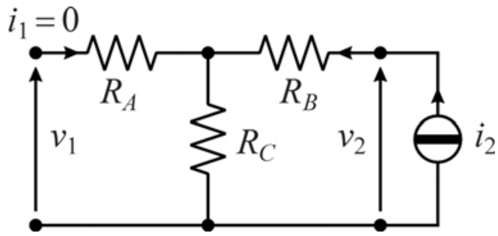
- r_{22} = resistenza di ingresso a vuoto alla porta 2
- r_{12} = resistenza di trasferimento a vuoto dalla porta 2 alla porta 1

Esempio – Resistori collegati a T



$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_A + R_C & R_C \\ R_C & R_B + R_C \end{bmatrix}$$

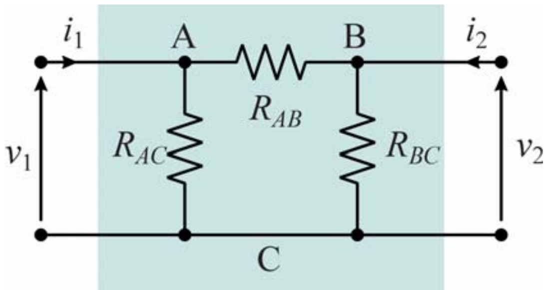




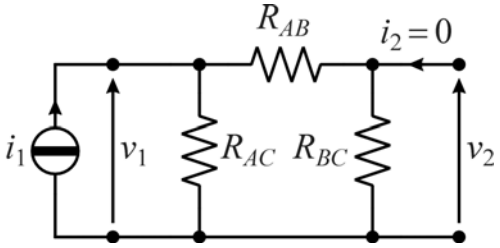
$$v_1 = (R_A + R_C) i_1$$
$$v_2 = R_C i_1$$

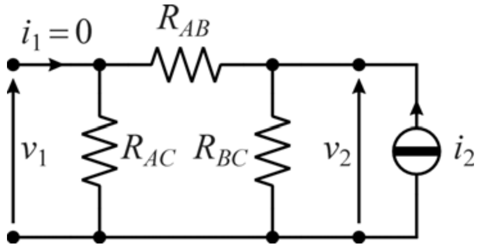
$$v_1 = R_C i_2$$
$$v_2 = (R_B + R_C) i_2$$

Esempio – Resistori collegati a Π



$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \dfrac{R_{AB}R_{AC} + R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} & \dfrac{R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \\ \dfrac{R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} & \dfrac{R_{AB}R_{BC} + R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \end{bmatrix}$$





$$v_1 = i_1 \frac{R_{AC}(R_{AB} + R_{BC})}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$
$$v_2 = i_1 \frac{R_{AC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}} R_{BC}$$

$$v_2 = i_2 \frac{R_{BC}(R_{AB} + R_{AC})}{R_{BC} + R_{AC} + R_{AB}}$$
$$v_1 = i_2 \frac{R_{BC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}} R_{AC}$$

Esempio – Equivalenza T – Π (stella-triangolo)

- Un doppio bipolo a T e un doppio bipolo a Π sono equivalenti se le loro matrici di resistenza $\mathbf{R}_{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{R}_{\Pi}$ sono uguali

$$\mathbf{R}_{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} R_{\mathrm{A}} + R_{\mathrm{C}} & R_{\mathrm{C}} \\ R_{\mathrm{C}} & R_{\mathrm{B}} + R_{\mathrm{C}} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}_{\Pi} = \begin{bmatrix} \dfrac{R_{\mathrm{AB}}R_{\mathrm{AC}} + R_{\mathrm{AC}}R_{\mathrm{BC}}}{R_{\mathrm{AB}} + R_{\mathrm{AC}} + R_{\mathrm{BC}}} & \dfrac{R_{\mathrm{AC}}R_{\mathrm{BC}}}{R_{\mathrm{AB}} + R_{\mathrm{AC}} + R_{\mathrm{BC}}} \\ \dfrac{R_{\mathrm{AC}}R_{\mathrm{BC}}}{R_{\mathrm{AB}} + R_{\mathrm{AC}} + R_{\mathrm{BC}}} & \dfrac{R_{\mathrm{AB}}R_{\mathrm{BC}} + R_{\mathrm{AC}}R_{\mathrm{BC}}}{R_{\mathrm{AB}} + R_{\mathrm{AC}} + R_{\mathrm{BC}}} \end{bmatrix}$$

- Confrontando le matrici si riconosce che devono essere verificate le relazioni

$$R_{\mathrm{A}} = \frac{R_{\mathrm{AB}}R_{\mathrm{AC}}}{R_{\mathrm{AB}} + R_{\mathrm{AC}} + R_{\mathrm{BC}}} \qquad R_{\mathrm{B}} = \frac{R_{\mathrm{AB}}R_{\mathrm{BC}}}{R_{\mathrm{AB}} + R_{\mathrm{AC}} + R_{\mathrm{BC}}} \qquad R_{\mathrm{C}} = \frac{R_{\mathrm{AC}}R_{\mathrm{BC}}}{R_{\mathrm{AB}} + R_{\mathrm{AC}} + R_{\mathrm{BC}}}$$

che corrispondono alle formule di trasformazione triangolo-stella

Matrice di conduttanza

- Per un doppio bipolo comandato in tensione le equazioni possono essere poste nella forma

$$i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}v_2$$
$$i_2 = g_{21}v_1 + g_{22}v_2$$

cioè

$$\mathbf{i} = \mathbf{G}\mathbf{v}$$

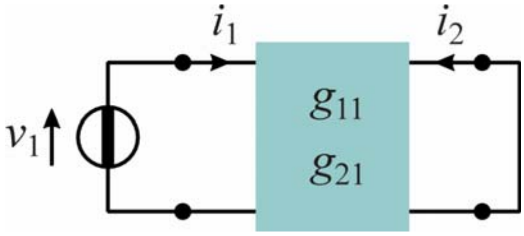
dove

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{G}$ = **matrice di conduttanza**

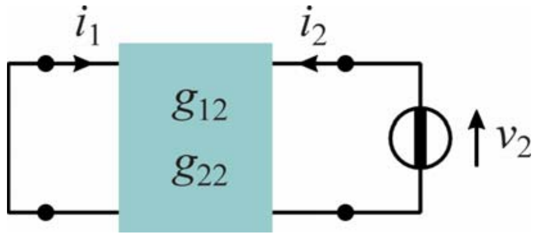
Significato dei parametri di conduttanza

$$g_{11} = \left.\frac{i_1}{v_1}\right|_{v_2=0} \qquad g_{21} = \left.\frac{i_2}{v_1}\right|_{v_2=0}$$



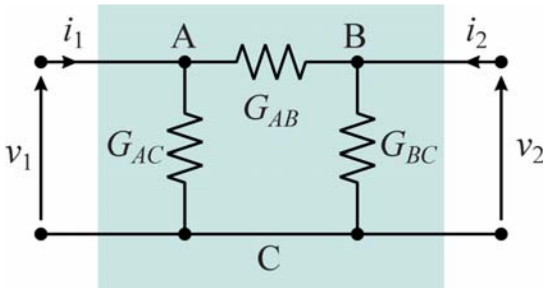
- g_{11} = conduttanza di ingresso in cortocircuito alla porta 1
- g_{21} = conduttanza di trasferimento in cortocircuito dalla porta 1 alla porta 2

$$g_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{v_1=0} \qquad g_{12} = \left.\frac{i_1}{v_2}\right|_{v_1=0}$$

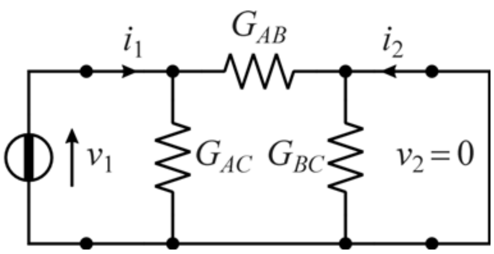


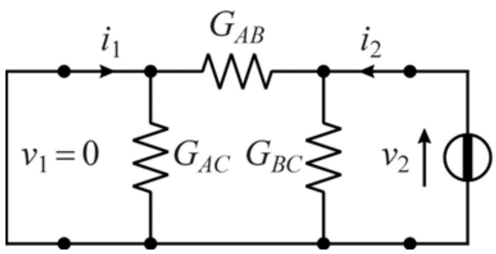
- g_{22} = conduttanza di ingresso in cortocircuito alla porta 2
- g_{12} = conduttanza di trasferimento in cortocircuito dalla porta 2 alla porta 1

Esempio – Resistori collegati a Π



$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{\mathrm{AB}} + G_{\mathrm{AC}} & -G_{\mathrm{AB}} \\ -G_{\mathrm{AB}} & G_{\mathrm{AB}} + G_{\mathrm{BC}} \end{bmatrix}$$

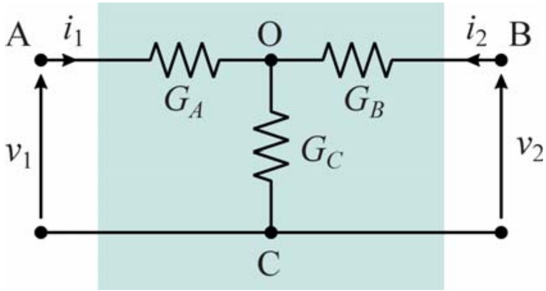




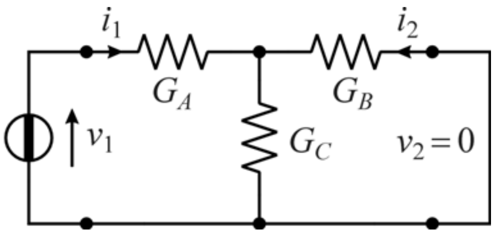
$$i_1 = v_1(G_{\mathrm{AB}} + G_{\mathrm{AC}})$$
$$i_2 = -v_1 G_{\mathrm{AB}}$$

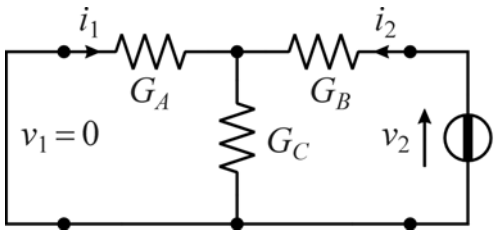
$$\boldsymbol{i_1 = -v_2 G_{AB}}$$
$$\boldsymbol{i_2 = v_2(G_{AB} + G_{BC})}$$

Esempio – Resistori collegati a T



$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \dfrac{G_A G_B + G_A G_C}{G_A + G_B + G_C} & -\dfrac{G_A G_B}{G_A + G_B + G_C} \\ -\dfrac{G_A G_B}{G_A + G_B + G_C} & \dfrac{G_A G_B + G_B G_C}{G_A + G_B + G_C} \end{bmatrix}$$





$$i_1 = v_1 \frac{G_A(G_B + G_C)}{G_A + G_B + G_C}$$

$$i_2 = -v_1 \frac{G_A(G_B + G_C)}{G_A + G_B + G_C} \cdot \frac{G_B}{G_B + G_C}$$

$$i_2 = v_2 \frac{G_B(G_A + G_C)}{G_B + G_A + G_C}$$

$$i_1 = -v_2 \frac{G_B(G_A + G_C)}{G_B + G_A + G_C} \cdot \frac{G_A}{G_A + G_C}$$

Matrici ibride

- Se è possibile esprimere v_1 e i_2 in funzione di i_1 e v_2 si ha

$$v_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2$$
$$i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} v_2$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{H}$ = **matrice ibrida** (**diretta**)

- Se è possibile esprimere i_1 e v_2 in funzione di v_1 e i_2 si ha

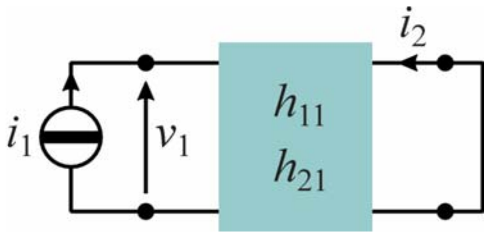
$$i_1 = h'_{11} v_1 + h'_{12} i_2$$
$$v_2 = h'_{21} v_1 + h'_{22} i_2$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}' \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}' = \begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{H}'$ = **matrice ibrida inversa**
- I coefficienti delle matrici ibride non hanno dimensioni omogenee

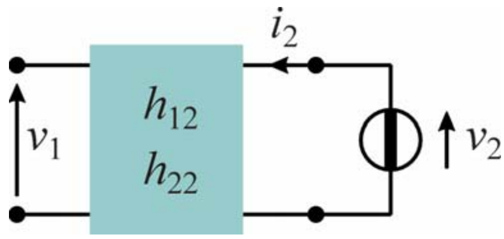
Significato dei coefficienti di H

$$h_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{v_2=0} \qquad h_{21} = \left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{v_2=0}$$



- h_{11} = resistenza di ingresso in cortocircuito alla porta 1
- h_{21} = guadagno di corrente in cortocircuito dalla porta 1 alla porta 2

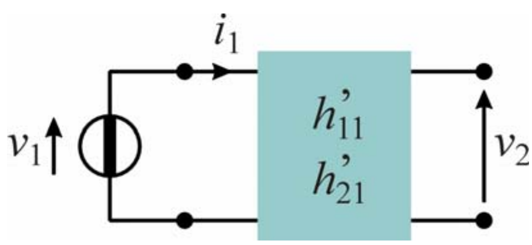
$$h_{12} = \left.\frac{v_1}{v_2}\right|_{i_1=0} \qquad h_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{i_1=0}$$



- h_{22} = conduttanza di ingresso a vuoto alla porta 2
- h_{12} = guadagno di tensione a vuoto dalla porta 2 alla porta 1

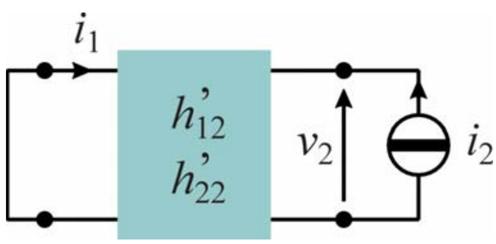
Significato dei coefficienti di H′

$$h'_{11} = \left.\frac{i_1}{v_1}\right|_{i_2=0} \qquad h'_{21} = \left.\frac{v_2}{v_1}\right|_{i_2=0}$$



- h'_{11} = conduttanza di ingresso a vuoto alla porta 1
- h'_{21} = guadagno di tensione a vuoto dalla porta 1 alla porta 2

$$h'_{12} = \left.\frac{i_1}{i_2}\right|_{v_1=0} \qquad h'_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{v_1=0}$$



- h'_{22} = resistenza di ingresso in cortocircuito alla porta 2
- h'_{12} = guadagno di corrente in cortocircuito dalla porta 2 alla porta 1

Matrice di trasmissione (matrice catena)

- Si esprimono la tensione e la corrente alla porta 1 in funzione della tensione e della corrente alla porta 2
- Per motivi pratici, conviene considerare come variabile indipendente $-i_2$ invece di i_2

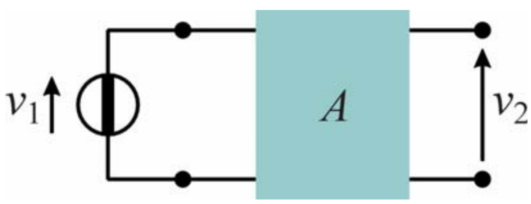
$$v_1 = Av_2 - Bi_2 \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$
$$i_1 = Cv_2 - Di_2$$

- $\mathbf{T}$ = **matrice di trasmissione** (**matrice catena**)
- Significato dei coefficienti

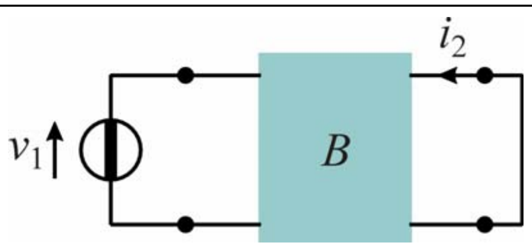
$$A = \left.\frac{v_1}{v_2}\right|_{i_2=0} \qquad B = \left.\frac{v_1}{-i_2}\right|_{v_2=0} \qquad C = \left.\frac{i_1}{v_2}\right|_{i_2=0} \qquad D = \left.\frac{i_1}{-i_2}\right|_{v_2=0}$$

- Non è possibile utilizzare queste relazioni per determinare i coefficienti (occorrerebbe fissare sia la tensione che la corrente della porta 2)

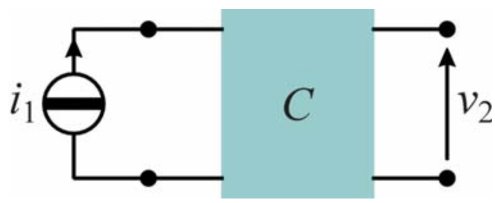
Determinazione dei coefficienti di T



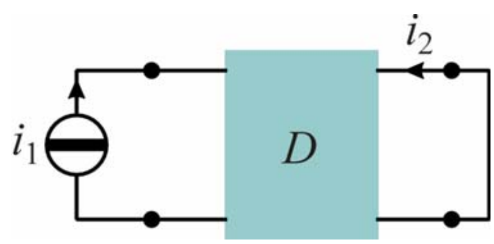
$$\frac{1}{A} = \left.\frac{v_2}{v_1}\right|_{i_2=0}$$



$$\frac{1}{B} = \left.\frac{-i_2}{v_1}\right|_{v_2=0}$$



$$\frac{1}{C} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{i_2=0}$$



$$\frac{1}{D} = \left.\frac{-i_2}{i_1}\right|_{v_2=0}$$

Matrice di trasmissione inversa

- Si esprimono la tensione e la corrente alla porta 2 in funzione della tensione e della corrente alla porta 1
- Per motivi pratici, conviene considerare come variabile indipendente $-i_1$ invece di i_1

$$v_2 = A'v_1 - B'i_1 \qquad \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}' \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ -i_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$$
$$i_2 = C'v_1 - D'i_1$$

- $\mathbf{T}'$ = **matrice di trasmissione inversa**
- Significato dei coefficienti

$$A' = \left.\frac{v_2}{v_1}\right|_{i_1=0} \qquad B' = \left.\frac{v_2}{-i_1}\right|_{v_1=0} \qquad C' = \left.\frac{i_2}{v_1}\right|_{i_1=0} \qquad D' = \left.\frac{i_2}{-i_1}\right|_{v_1=0}$$

Relazioni tra le rappresentazioni

- Confrontando le varie espressioni delle equazioni di un doppio bipolo si riconosce che (quando il doppio bipolo ammette tutte le rappresentazioni considerate)
  - la matrice $\mathbf{G}$ è l'inversa della matrice $\mathbf{R}$
  - la matrice $\mathbf{H}'$ è l'inversa della matrice $\mathbf{H}$
  - La matrice $\mathbf{T}'$ è l'inversa della matrice $\mathbf{T}$ con i coefficienti della diagonale secondaria cambiati di segno a causa delle scelte diverse per i versi di riferimento delle correnti

- Le altre relazioni tra le varie rappresentazioni si possono ottenere utilizzando le definizioni dei coefficienti delle matrici

Esempio - Passaggio da parametri r a parametri h

$$\begin{aligned} v_1 &= r_{11} i_1 + r_{12} i_2 \\ v_2 &= r_{21} i_1 + r_{22} i_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_1 &= h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \\ i_2 &= h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \end{aligned}$$

- Calcolo degli elementi della prima colonna di $\mathbf{H}$

$$h_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{v_2=0} \qquad h_{21} = \left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{v_2=0}$$

(si pone $v_2 = 0$)

$$v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_1 &= r_{11} i_1 + r_{12} i_2 \\ 0 &= r_{21} i_1 + r_{22} i_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} i_2 &= -\frac{r_{21}}{r_{22}} i_1 \\ v_1 &= \left(r_{11} - r_{12} \frac{r_{21}}{r_{22}} \right) i_1 = \frac{\det(\mathbf{R})}{r_{22}} i_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad h_{11} = \frac{\det(\mathbf{R})}{r_{22}} \qquad h_{21} = -\frac{r_{21}}{r_{22}}$$

Esempio - Passaggio da parametri r a parametri h

$$\begin{aligned} v_1 &= r_{11} i_1 + r_{12} i_2 \\ v_2 &= r_{21} i_1 + r_{22} i_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_1 &= h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \\ i_2 &= h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \end{aligned}$$

- Calcolo degli elementi della seconda colonna di $\mathbf{H}$

$$h_{12} = \left.\frac{v_1}{v_2}\right|_{i_1=0} \qquad h_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{i_1=0}$$

(si pone $i_1 = 0$)

$$i_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_1 &= r_{12} i_2 \\ v_2 &= r_{22} i_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} i_2 &= \frac{1}{r_{22}} v_2 \\ v_1 &= \frac{r_{12}}{r_{22}} v_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad h_{12} = \frac{r_{12}}{r_{22}} \qquad h_{22} = \frac{1}{r_{22}}$$

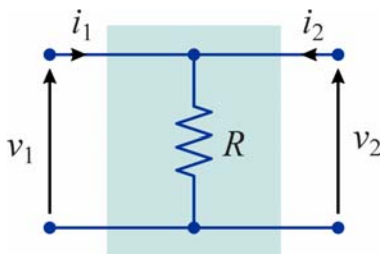
Relazioni tra le rappresentazioni

	$\mathbf{R}$	$\mathbf{G}$	$\mathbf{H}$	$\mathbf{H}'$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}'$
$\mathbf{R}$	$\begin{matrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{g_{22}}{\Delta\mathbf{G}} & -\frac{g_{12}}{\Delta\mathbf{G}} \\ -\frac{g_{21}}{\Delta\mathbf{G}} & \frac{g_{11}}{\Delta\mathbf{G}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta\mathbf{H}}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h'_{11}} & -\frac{h'_{12}}{h'_{11}} \\ \frac{h'_{21}}{h'_{11}} & \frac{\Delta\mathbf{H}'}{h'_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta\mathbf{T}}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D'}{C'} & \frac{1}{C'} \\ \frac{\Delta\mathbf{T}'}{C'} & \frac{A'}{C'} \end{matrix}$
$\mathbf{G}$	$\begin{matrix} \frac{r_{22}}{\Delta\mathbf{R}} & -\frac{r_{12}}{\Delta\mathbf{R}} \\ -\frac{r_{21}}{\Delta\mathbf{R}} & \frac{r_{11}}{\Delta\mathbf{R}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta\mathbf{H}}{h_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta\mathbf{H}'}{h'_{22}} & \frac{h'_{12}}{h'_{22}} \\ -\frac{h'_{21}}{h'_{22}} & \frac{1}{h'_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{B} & -\frac{\Delta\mathbf{T}}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A'}{B'} & -\frac{1}{B'} \\ -\frac{\Delta\mathbf{T}'}{B'} & \frac{D'}{B'} \end{matrix}$
$\mathbf{H}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta\mathbf{R}}{r_{22}} & \frac{r_{12}}{r_{22}} \\ -\frac{r_{21}}{r_{22}} & \frac{1}{r_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{g_{11}} & -\frac{g_{12}}{g_{11}} \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & \frac{\Delta\mathbf{G}}{g_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h'_{22}}{\Delta\mathbf{H}} & -\frac{h'_{12}}{\Delta\mathbf{H}} \\ -\frac{h'_{21}}{\Delta\mathbf{H}} & \frac{h'_{11}}{\Delta\mathbf{H}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta\mathbf{T}}{D} \\ -\frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B'}{A'} & \frac{1}{A'} \\ -\frac{\Delta\mathbf{T}'}{A'} & \frac{C'}{A'} \end{matrix}$
$\mathbf{H}'$	$\begin{matrix} \frac{1}{r_{11}} & -\frac{r_{12}}{r_{11}} \\ \frac{r_{21}}{r_{11}} & \frac{\Delta\mathbf{R}}{r_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta\mathbf{G}}{g_{22}} & \frac{g_{12}}{g_{22}} \\ -\frac{g_{21}}{g_{22}} & \frac{1}{g_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h_{22}}{\Delta\mathbf{H}} & -\frac{h_{12}}{\Delta\mathbf{H}} \\ -\frac{h_{21}}{\Delta\mathbf{H}} & \frac{h_{11}}{\Delta\mathbf{H}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C}{A} & -\frac{\Delta\mathbf{T}}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{B}{A} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C'}{D'} & -\frac{1}{D'} \\ \frac{\Delta\mathbf{T}'}{D'} & \frac{A'}{D'} \end{matrix}$
$\mathbf{T}$	$\begin{matrix} \frac{r_{11}}{r_{21}} & \frac{\Delta\mathbf{R}}{r_{21}} \\ \frac{1}{r_{21}} & \frac{r_{22}}{r_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{g_{22}}{g_{21}} & -\frac{1}{g_{21}} \\ -\frac{\Delta\mathbf{G}}{g_{21}} & -\frac{g_{11}}{g_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta\mathbf{H}}{h_{21}} & -\frac{h_{11}}{h_{21}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{21}} & -\frac{1}{h_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h'_{21}} & \frac{h'_{22}}{h'_{21}} \\ \frac{h'_{11}}{h'_{21}} & \frac{\Delta\mathbf{H}'}{h'_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D'}{\Delta\mathbf{T}'} & \frac{B'}{\Delta\mathbf{T}'} \\ \frac{C'}{\Delta\mathbf{T}'} & \frac{A}{\Delta\mathbf{T}'} \end{matrix}$
$\mathbf{T}'$	$\begin{matrix} \frac{r_{22}}{r_{12}} & \frac{\Delta\mathbf{R}}{r_{12}} \\ \frac{1}{r_{12}} & \frac{r_{11}}{r_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{g_{11}}{g_{12}} & -\frac{1}{g_{12}} \\ -\frac{\Delta\mathbf{G}}{g_{12}} & -\frac{g_{22}}{g_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{12}} & \frac{h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{h_{22}}{h_{12}} & \frac{\Delta\mathbf{H}}{h_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta\mathbf{H}'}{h'_{12}} & -\frac{h'_{22}}{h'_{12}} \\ -\frac{h'_{11}}{h'_{12}} & -\frac{1}{h'_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{\Delta\mathbf{T}} & \frac{B}{\Delta\mathbf{T}} \\ \frac{C}{\Delta\mathbf{T}} & \frac{A}{\Delta\mathbf{T}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A' & B' \\ C' & D' \end{matrix}$

$\Delta\mathbf{M} = \det(\mathbf{M})$

Ogni riga riporta le espressioni dei coefficienti di una matrice in funzione dei coefficienti delle matrici indicate nelle intestazioni delle colonne

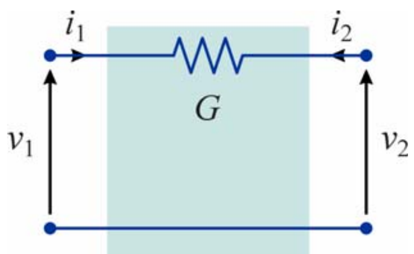
Esempio – doppi bipoli che non ammettono la matrice R o la matrice G



$$v_1 = v_2 = R(i_1 + i_2)$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & R \\ R & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R & R \\ R & R \end{bmatrix}$$

- Non è possibile imporre valori arbitrari ad entrambe le tensioni (cioè utilizzarle come variabili indipendenti) ➡ la matrice **G** non è definita



$$i_1 = -i_2 = G(v_1 - v_2)$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & -G \\ -G & G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} G & -G \\ -G & G \end{bmatrix}$$

- Non è possibile utilizzare le correnti come variabili indipendenti ➡ la matrice **R** non è definita

Reciprocità

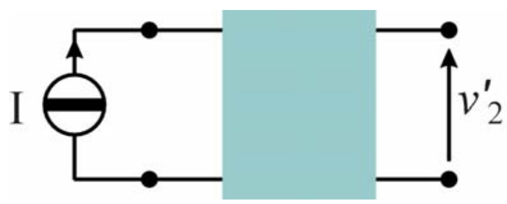
- **Ipotesi:**
  $\{v_1', v_2', i_1', i_2'\}$
  $\{v_1'', v_2'', i_1'', i_2''\}$ ➡ insiemi arbitrari di tensioni e correnti che soddisfano le equazioni del doppio bipolo
- **Definizione:**
  si dice che il doppio bipolo è **reciproco** se

$$v_1' i_1'' + v_2' i_2'' = v_1'' i_1' + v_2'' i_2'$$

- Per interpretare il significato di questa relazione e ricavare le condizioni che devono soddisfare i parametri delle matrici del doppio bipolo si fa riferimento alle situazioni in cui una sola delle variabili indipendenti è diversa da zero

Reciprocità - parametri r

Condizione 1



$$i_1' = \mathrm{I} \qquad i_2' = 0$$

$$v_2' = r_{21} i_1' + r_{22} i_2' = r_{21}\,\mathrm{I}$$

Condizione 2

$$i_1'' = 0 \qquad i_2'' = \mathrm{I}$$

$$v_1'' = r_{11} i_1'' + r_{12} i_2'' = r_{12}\,\mathrm{I}$$

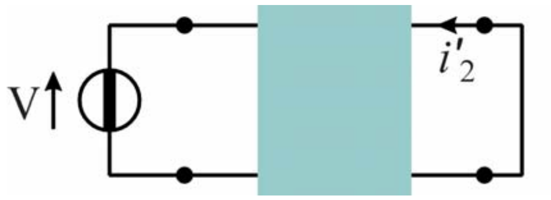
Condizione di reciprocità

$$v_1' i_1'' + v_2' i_2'' = v_1'' i_1' + v_2'' i_2' \Rightarrow v_1' \cdot 0 + v_2'\,\mathrm{I} = v_1''\,\mathrm{I} + v_2'' \cdot 0 \Rightarrow v_2' = v_1''$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{12} = r_{21}}$$

Reciprocità - parametri g

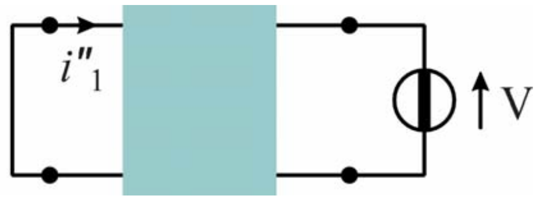
Condizione 1



$v_1' = \mathrm{V} \qquad v_2' = 0$

$i_2' = g_{21} v_1' + g_{22} v_2' = g_{21}\,\mathrm{V}$

Condizione 2



$v_1'' = 0 \qquad v_2'' = \mathrm{V}$

$i_1'' = g_{11} v_1'' + g_{12} v_2'' = g_{12}\,\mathrm{V}$

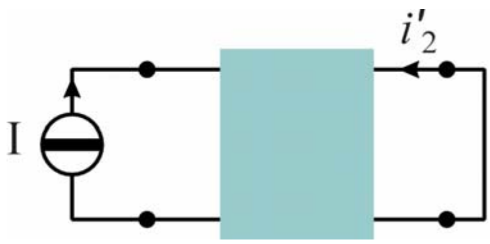
Condizione di reciprocità

$$v_1' i_1'' + v_2' i_2'' = v_1'' i_1' + v_2'' i_2' \Rightarrow \mathrm{V}\, i_1'' + 0 \cdot i_2'' = 0 \cdot i_1' + \mathrm{V}\, i_2' \Rightarrow i_2' = i_1''$$

$$\Rightarrow \boxed{g_{12} = g_{21}}$$

Reciprocità - parametri h

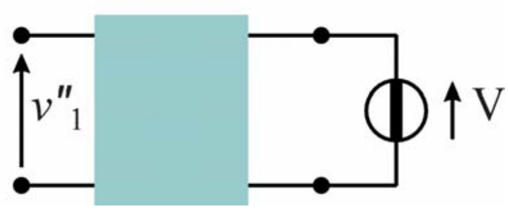
Condizione 1



$i_1' = \mathrm{I} \qquad v_2' = 0$

$i_2' = h_{21} i_1' + h_{22} v_2' = h_{21}\,\mathrm{I}$

Condizione 2



$i_1'' = 0 \qquad v_2'' = \mathrm{V}$

$v_1'' = h_{11} i_1'' + h_{12} v_2'' = h_{12}\,\mathrm{V}$

Condizione di reciprocità

$$v_1' i_1'' + v_2' i_2'' = v_1'' i_1' + v_2'' i_2' \Rightarrow v_1' \cdot 0 + 0 \cdot i_2'' = v_1'' \cdot \mathrm{I} + \mathrm{V}\, i_2' \Rightarrow \frac{i_2'}{\mathrm{I}} = -\frac{v_1''}{\mathrm{V}}$$

$$\Rightarrow \boxed{h_{12} = -h_{21}}$$

Reciprocità - parametri h′, T e T′

- **Parametri h′**:
  - procedendo in modo simile al caso precedente si ottiene la condizione
    $$h'_{12} = -h'_{21}$$
- **Parametri di trasmissione**:
  - si può dimostrare che per un doppio bipolo reciproco valgono le condizioni
    $$\det(\mathbf{T}) = 1$$
    $$\det(\mathbf{T}') = 1$$

Doppi bipoli reciproci

- Per un doppio bipolo reciproco valgono le seguenti proprietà:
  - Applicando una corrente I ad una qualunque delle porte all’altra porta si ottiene la stessa tensione a vuoto
  - Applicando una tensione V ad una qualunque delle porte all’altra porta si ottiene la stessa corrente di cortocircuito
  - Il guadagno di corrente in cortocircuito in una direzione è uguale al guadagno di tensione a vuoto nella direzione opposta cambiato di segno

Simmetria

- Si dice che un doppio bipolo è **simmetrico** se, per ogni insieme di tensioni e di correnti alle porte che soddisfano le sue equazioni caratteristiche, anche l'insieme ottenuto scambiando la porta 1 con la porta 2 soddisfa le equazioni caratteristiche
- Si può dimostrare che le matrici di un due porte simmetrico soddisfano le seguenti proprietà
  - matrice $\mathbf{R}$: $r_{11} = r_{22}$ $r_{12} = r_{21}$
  - matrice $\mathbf{G}$: $g_{11} = g_{22}$ $g_{12} = g_{21}$
  - matrice $\mathbf{H}$: $h_{12} = -h_{21}$ $\det(\mathbf{H}) = 1$
  - matrice $\mathbf{H}'$: $h'_{12} = -h'_{21}$ $\det(\mathbf{H}') = 1$
  - matrice $\mathbf{T}$: $A = D$ $\det(\mathbf{T}) = 1$
  - matrice $\mathbf{T}'$: $A' = D'$ $\det(\mathbf{T}') = 1$

➡ La simmetria implica anche la reciprocità

Trasformatore ideale

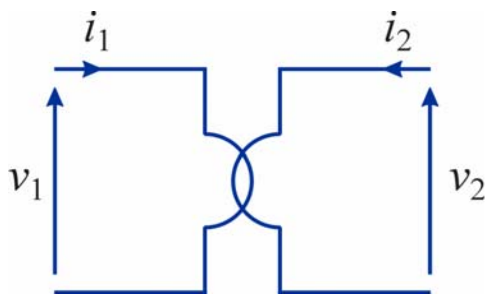
- Le equazioni del trasformatore ideale possono essere espresse intermini di matrice ibrida o di matrice di trasmissione (dirette o inverse)

Parametri di trasmissione

$$v_1 = Kv_2$$
$$i_1 = -\frac{1}{K} i_2$$

Parametri ibridi

$$v_1 = Kv_2$$
$$i_2 = -Ki_1$$

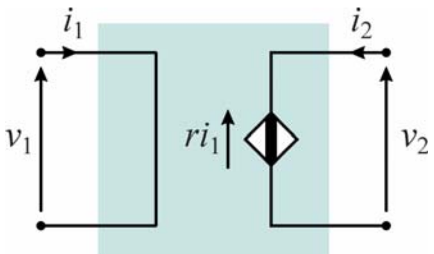


K = **rapporto di trasformazione** o **rapporto spire**

- Per il trasformatore ideale non è possibile definire le matrici $\mathbf{R}$ e $\mathbf{G}$
- Vale la relazione $h_{12} = -h_{21} = K$
  - ➡ Il trasformatore ideale è un componente reciproco (ma non simmetrico, se $K \neq 1$)

Generatori dipendenti

Generatore di tensione controllato in corrente



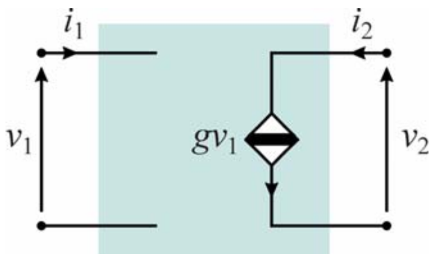
$$v_1 = 0$$
$$v_2 = ri_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Caso particolare di rappresentazione in termini di parametri di resistenza

$$r_{11} = r_{12} = r_{22} = 0 \qquad r_{21} = r$$

Generatore di corrente controllato in tensione



$$i_1 = 0$$
$$i_2 = gv_1$$

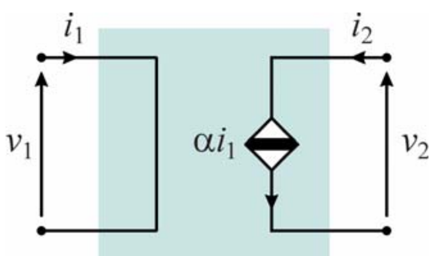
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Caso particolare di rappresentazione in termini di parametri di conduttanza

$$g_{11} = g_{12} = g_{22} = 0 \qquad g_{21} = g$$

Generatori dipendenti

Generatore di corrente controllato in corrente



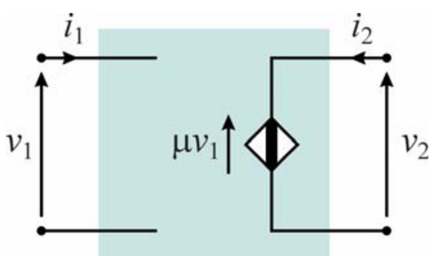
$$v_1 = 0$$
$$i_2 = \alpha i_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Caso particolare di rappresentazione in termini di parametri ibridi (diretti)

$$h_{11} = h_{12} = h_{22} = 0 \qquad h_{21} = \alpha$$

Generatore di tensione controllato in tensione



$$i_1 = 0$$
$$v_2 = \mu v_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Caso particolare di rappresentazione in termini di parametri ibridi (inversi)

$$h'_{11} = h'_{12} = h'_{22} = 0 \qquad h'_{21} = \mu$$

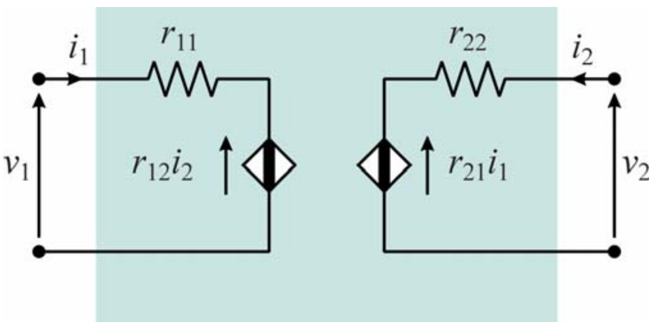
Generatori dipendenti

- I quattro tipi di generatori dipendenti corrispondono a matrici **R**, **G**, **H** e **H'** con il solo elemento 21 diverso da zero
  - ➡ I generatori dipendenti sono componenti non reciproci
- Ciascun tipo di generatore ammette una sola tra le matrici **R**, **G**, **H** e **H'**
- Si può verificare che l'unica altra matrice definita in tutti e quattro i casi è la matrice **T**
- I doppi bipoli (e più in generale i componenti N-porte) lineari resistivi possono essere rappresentati mediante circuiti equivalenti formati da generatori dipendenti e resistori
  - ➡ In questo modo è possibile estendere i metodi di analisi studiati in Elettrotecnica ai circuiti che contengono doppi bipoli (e N-porte)

Circuiti equivalenti di doppi bipoli lineari

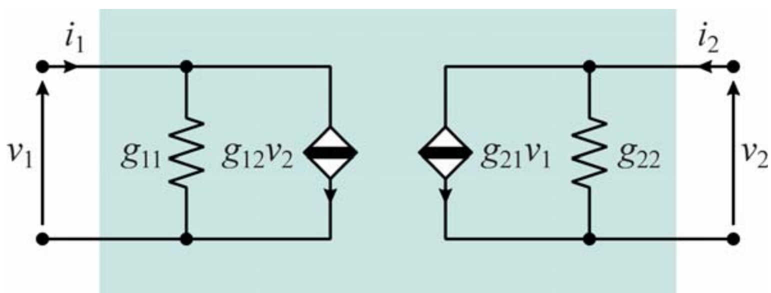
Matrice di resistenza

$$v_1 = r_{11} i_1 + r_{12} i_2$$
$$v_2 = r_{21} i_1 + r_{22} i_2$$



Matrice di conduttanza

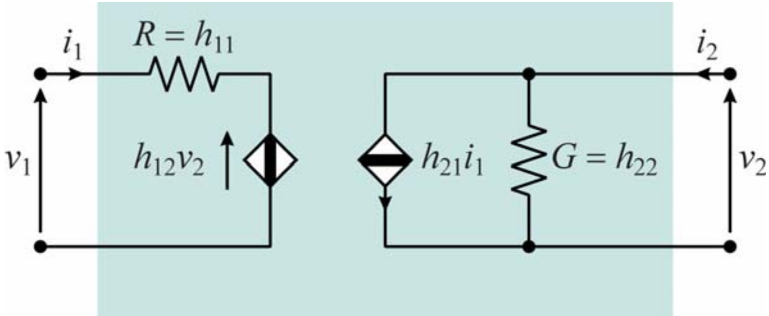
$$i_1 = g_{11} v_1 + g_{12} v_2$$
$$i_2 = g_{21} v_1 + g_{22} v_2$$



Circuiti equivalenti di doppi bipoli lineari

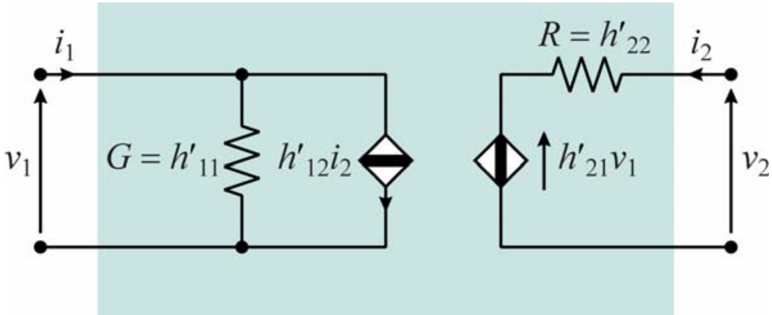
Matrice H

$$v_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2$$
$$i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} v_2$$



Matrice H′

$$i_1 = h'_{11} v_1 + h'_{12} i_2$$
$$v_2 = h'_{21} v_1 + h'_{22} i_2$$

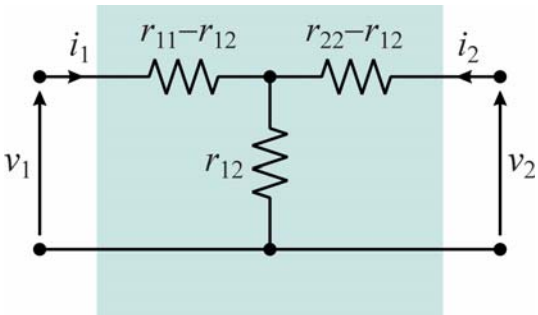


Circuiti equivalenti di doppi bipoli lineari

Circuiti equivalenti a T

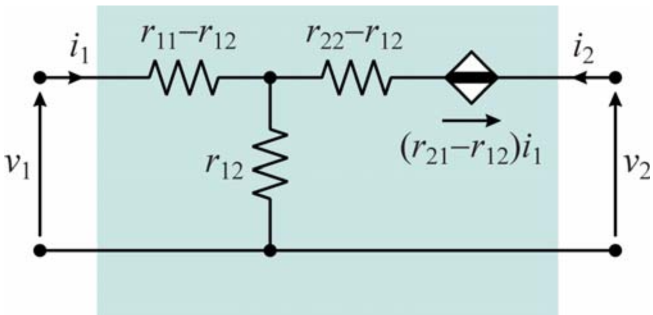
Doppio bipolo reciproco

$$v_1 = r_{11} i_1 + r_{12} i_2$$
$$v_2 = r_{12} i_1 + r_{22} i_2$$



Doppio bipolo non reciproco

$$v_1 = r_{11} i_1 + r_{12} i_2$$
$$v_2 = r_{21} i_1 + r_{22} i_2$$

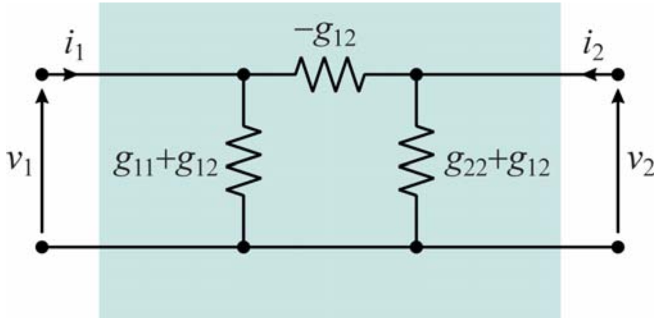


Circuiti equivalenti di doppi bipoli lineari

Circuiti equivalenti a Π

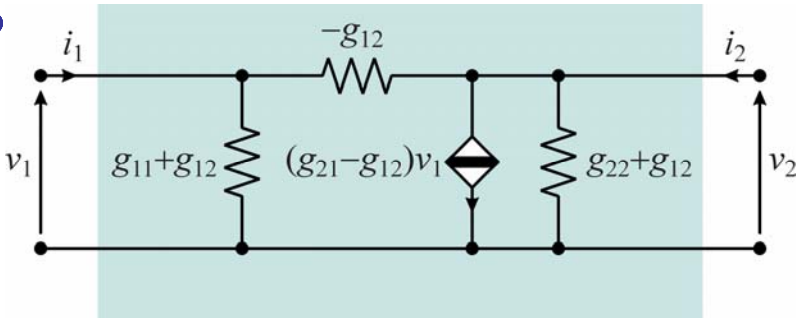
Doppio bipolo reciproco

$$i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}v_2$$
$$i_2 = g_{12}v_1 + g_{22}v_2$$



Doppio bipolo non reciproco

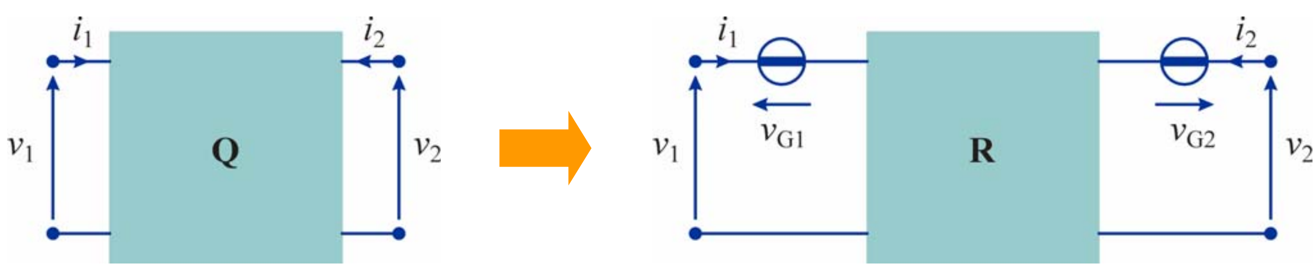
$$i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}v_2$$
$$i_2 = g_{21}v_1 + g_{22}v_2$$



Teoremi di rappresentazione dei doppi bipoli

Rappresentazione comandata in corrente

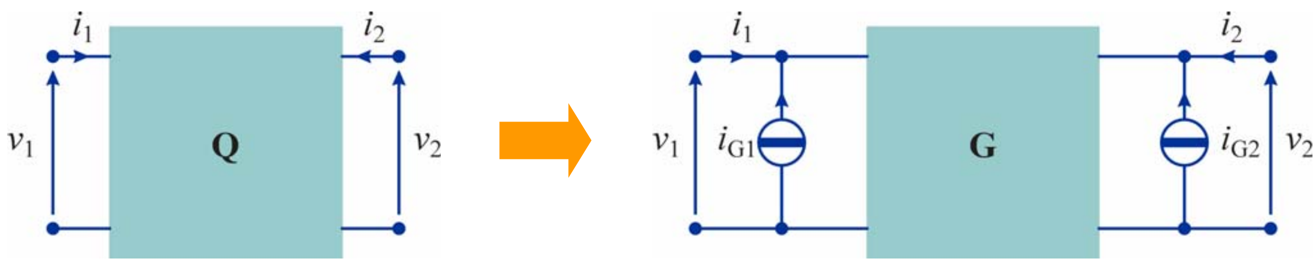
- **Ipotesi**:
  - Q = doppio bipolo formato da componenti resistivi lineari e generatori indipendenti
  - Q è comandato in corrente
- **Circuito equivalente**:
  - v_{G1}, v_{G2} = tensioni a vuoto alle porte di Q (v_1 e v_2 per $i_1 = i_2 = 0$)
  - **R** = matrice di resistenza del doppio bipolo ottenuto da Q azzerando i generatori indipendenti



Teoremi di rappresentazione dei doppi bipoli

Rappresentazione comandata in tensione

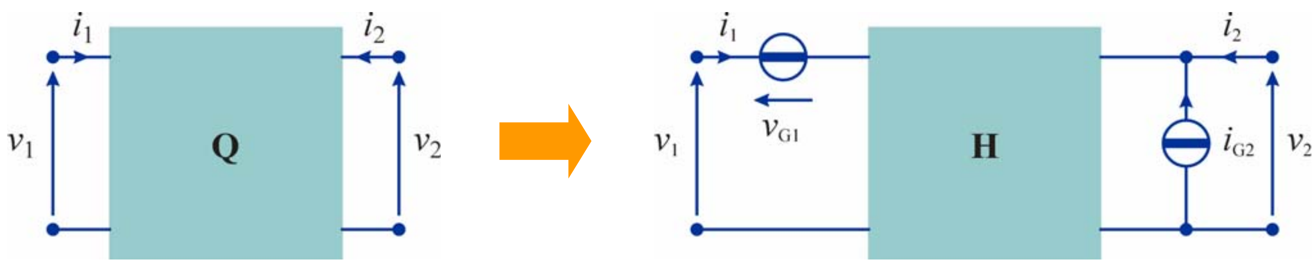
- **Ipotesi**:
  - Q = doppio bipolo formato da componenti resistivi lineari e generatori indipendenti
  - Q è comandato in tensione
- **Circuito equivalente**:
  - i_{G1}, i_{G2} = correnti di cortocircuito alle porte di Q ($-i_1$ e $-i_2$ per $v_1 = v_2 = 0$)
  - $\mathbf{G}$ = matrice di conduttanza del doppio bipolo ottenuto da Q azzerando i generatori indipendenti



Teoremi di rappresentazione dei doppi bipoli

Rappresentazione ibrida (diretta)

- **Ipotesi**:
  - Q = doppio bipolo formato da componenti resistivi lineari e generatori indipendenti
  - Q ammette la rappresentazione ibrida (diretta)
- **Circuito equivalente**:
  - $v_{G1} = v_1$ per $i_1 = 0$, $v_2 = 0$
  - $i_{G2} = -i_2$ per $i_1 = 0$, $v_2 = 0$
  - $\mathbf{H}$ = matrice ibrida (diretta) del doppio bipolo ottenuto da Q azzerando i generatori indipendenti

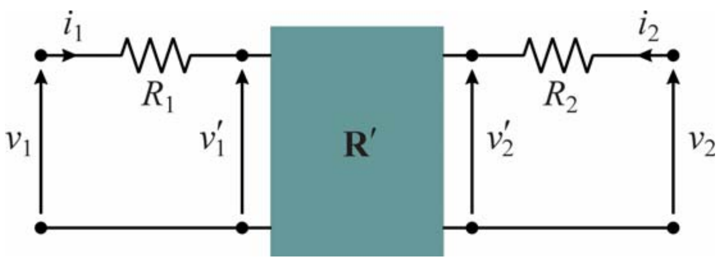


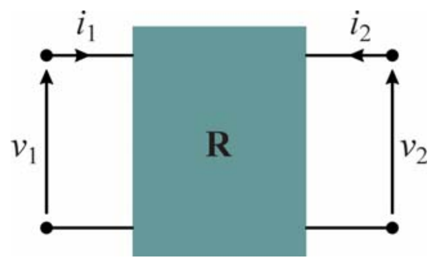
Collegamenti di bipoli e doppi bipoli

- Di seguito si prenderanno in esame alcuni casi in cui un doppio bipolo è ottenuto collegando due doppi bipoli oppure collegando un doppio bipolo con uno più bipoli
- In tutti i casi si sottintende che siano soddisfatte le seguenti ipotesi (che nei casi pratici dovranno sottoposte a verifica)
  - I collegamenti considerati sono leciti (cioè non dànno origine a circuiti impossibili o indeterminati)
  - Le matrici utilizzate per rappresentare i doppi bipoli sono definite
  - Nel caso di doppi bipoli non intrinseci, i componenti, collegati nei modi considerati, si comportano effettivamente come doppi bipoli

Resistori in serie alle porte

- In questo caso conviene utilizzare i parametri di resistenza





$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} r'_{11} & r'_{12} \\ r'_{21} & r'_{22} \end{bmatrix}$$

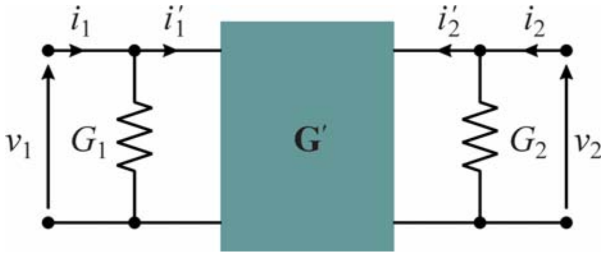
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r'_{11} + R_1 & r'_{12} \\ r'_{21} & r'_{22} + R_2 \end{bmatrix}$$

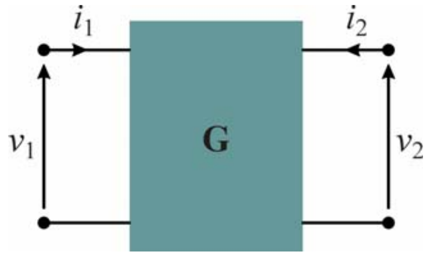
$$v_1 = R_1 i_1 + v'_1 = (R_1 + r'_{11}) i_1 + r'_{12} i_2$$
$$v_2 = R_2 i_2 + v'_2 = r'_{21} i_1 + (R_2 + r'_{22}) i_2$$

➡ Le resistenze in serie alle porte si sommano alle resistenze di ingresso

Resistori in parallelo alle porte

- In questo caso conviene utilizzare i parametri di conduttanza





$$\mathbf{G}' = \begin{bmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} \end{bmatrix}$$

$$i_1 = G_1 v_1 + i'_1 = (G_1 + g'_{11})v_1 + g'_{12} v_2$$
$$i_2 = G_2 v_2 + i'_2 = g'_{21} v_1 + (G_2 + g'_{22})v_2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g'_{11} + G_1 & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} + G_2 \end{bmatrix}$$

➡ Le conduttanze dei resistori in parallelo alle porte si sommano alle conduttanze di ingresso

Doppi bipoli in serie

- **LKI:**

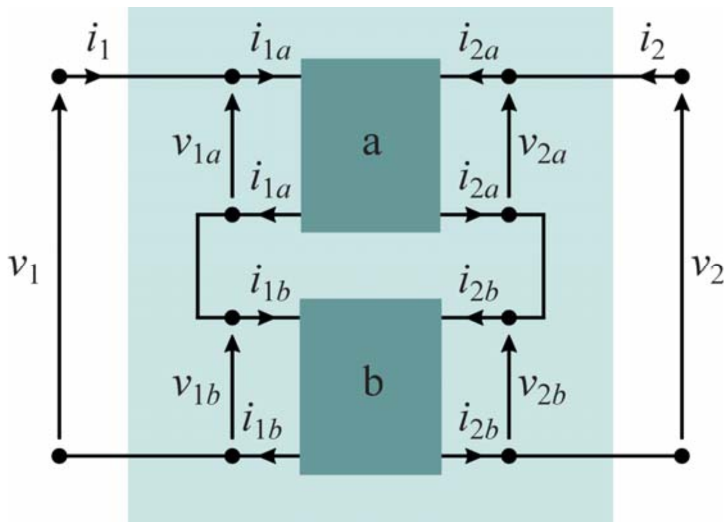
$$i_1 = i_{1a} = i_{1b}$$
$$i_2 = i_{2a} = i_{2b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{i} = \mathbf{i}_a = \mathbf{i}_b$$

- **LKV:**

$$v_1 = v_{1a} + v_{1b}$$
$$v_2 = v_{2a} + v_{2b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b$$

- **Componenti:**

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{R}_a \mathbf{i}_a$$
$$\mathbf{v}_b = \mathbf{R}_b \mathbf{i}_b$$

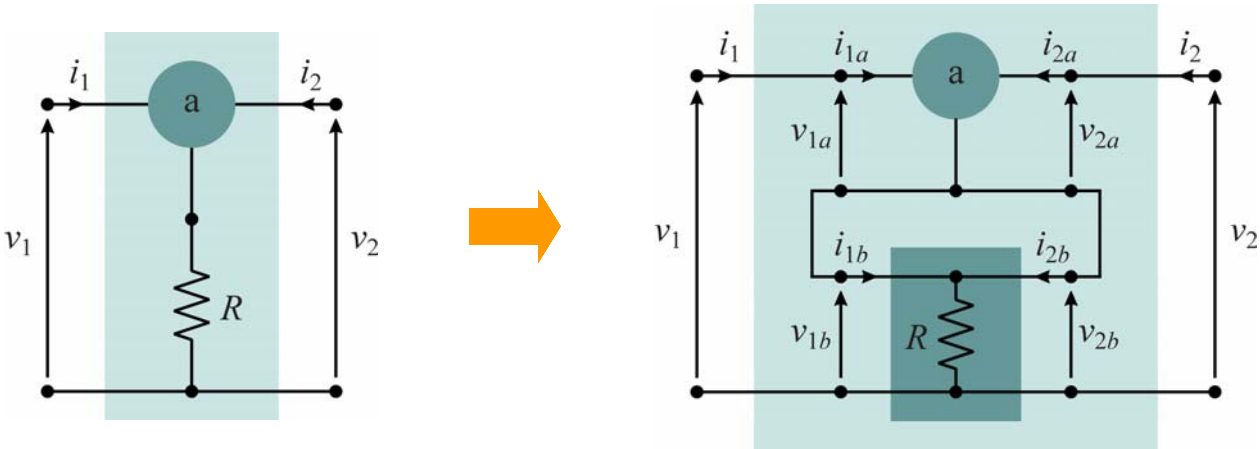


➡ $\mathbf{v} = (\mathbf{R}_a + \mathbf{R}_b)\mathbf{i} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{i}$ ➡ $\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{R}_a + \mathbf{R}_b}$

- La matrice **R** del doppio bipolo risultante è data dalla somma delle matrici di resistenza dei due doppi bipoli

Resistore in serie al terminale comune di un tripolo

- Questo collegamento può essere visto come un caso particolare di collegamento in serie di doppi bipoli



$$\mathbf{R}_\mathrm{a} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}_\mathrm{b} = \begin{bmatrix} R & R \\ R & R \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R} = \mathbf{R}_a + \mathbf{R}_\mathrm{b} = \begin{bmatrix} r_{11}+R & r_{12}+R \\ r_{21}+R & r_{22}+R \end{bmatrix}$$

➡ R si somma a tutti gli elementi della matrice $\mathbf{R}_\mathrm{a}$

Doppi bipoli in parallelo

- **LKV:**

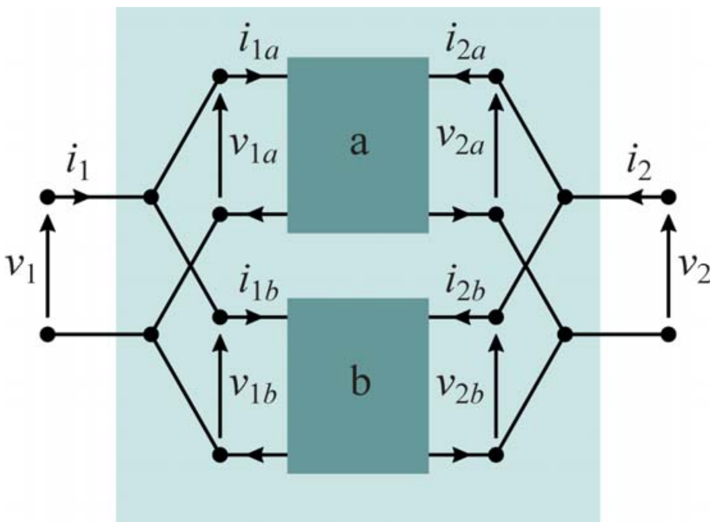
$$v_1 = v_{1a} = v_{1b}$$
$$v_2 = v_{2a} = v_{2b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_b$$

- **LKI:**

$$i_1 = i_{1a} + i_{1b}$$
$$i_2 = i_{2a} + i_{2b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{i} = \mathbf{i}_a + \mathbf{i}_b$$

- **Componenti:**

$$\mathbf{i}_a = \mathbf{G}_a \mathbf{v}_a$$
$$\mathbf{i}_b = \mathbf{G}_b \mathbf{v}_b$$

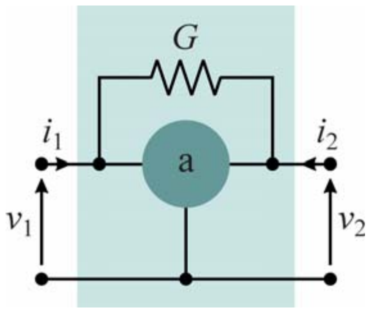


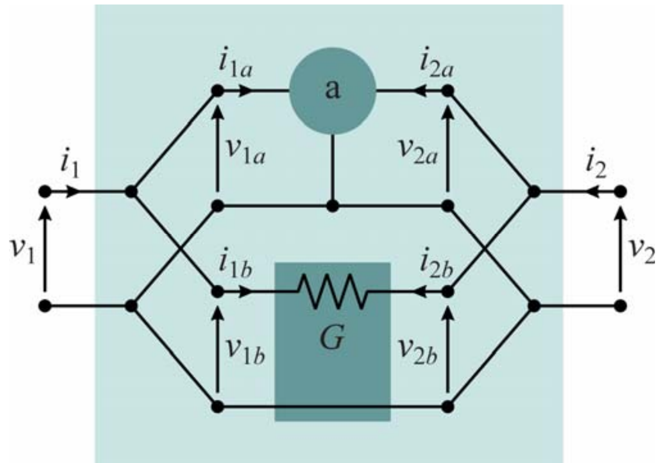
➡ $\mathbf{i} = (\mathbf{G}_a + \mathbf{G}_b)\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{i} = \mathbf{G}\mathbf{v}$ ➡ $\boxed{\mathbf{G} = \mathbf{G}_a + \mathbf{G}_b}$

➡ La matrice $\mathbf{G}$ del doppio bipolo risultante è data dalla somma delle matrici di conduttanza dei due doppi bipoli

Resistore collegato tra le due porte

- Questo può essere visto come un caso particolare di collegamento in parallelo di doppi bipoli



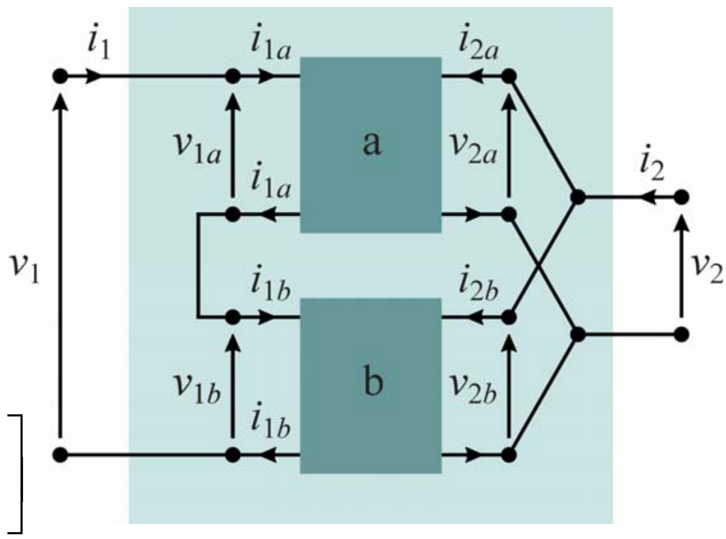


$$\mathbf{G}_\text{a} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_\text{b} = \begin{bmatrix} G & -G \\ -G & G \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \mathbf{G}_\text{a} + \mathbf{G}_\text{b} = \begin{bmatrix} g_{11}+G & g_{12}-G \\ g_{21}-G & g_{22}+G \end{bmatrix}$$

➡ G si somma agli elementi della diagonale principale e si sottrae dagli elementi della diagonale secondaria della matrice $\mathbf{G}_\text{a}$

Collegamento serie-parallelo

- **LKV:**
  $v_1 = v_{1a} + v_{1b}$
  $v_2 = v_{2a} = v_{2b}$
- **LKI:**
  $i_1 = i_{1a} = i_{1b}$
  $i_2 = i_{2a} + i_{2b}$
- **Componenti:**



$$\begin{bmatrix} v_{1a} \\ i_{2a} \end{bmatrix} = \mathbf{H}_a \begin{bmatrix} i_{1a} \\ v_{2a} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_{1b} \\ i_{2b} \end{bmatrix} = \mathbf{H}_b \begin{bmatrix} i_{1b} \\ v_{2b} \end{bmatrix}$$

➡ $$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{H}_a + \mathbf{H}_b) \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$ ➡ $\boxed{\mathbf{H} = \mathbf{H}_a + \mathbf{H}_b}$

➡ La matrice $\mathbf{H}$ del doppio bipolo risultante è data dalla somma delle matrici ibride dei due doppi bipoli

Collegamento parallelo-serie

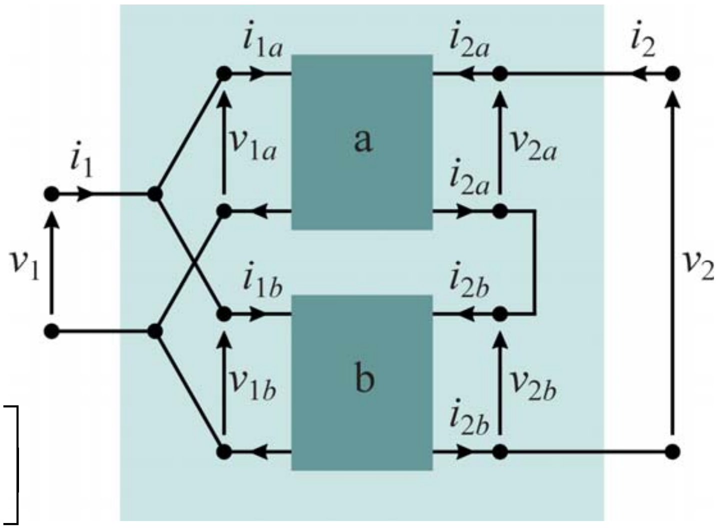
- **LKV:**

  $v_1 = v_{1a} = v_{1b}$

  $v_2 = v_{2a} + v_{2b}$
- **LKI:**

  $i_1 = i_{1a} + i_{1b}$

  $i_2 = i_{2a} = i_{2b}$
- **Componenti:**

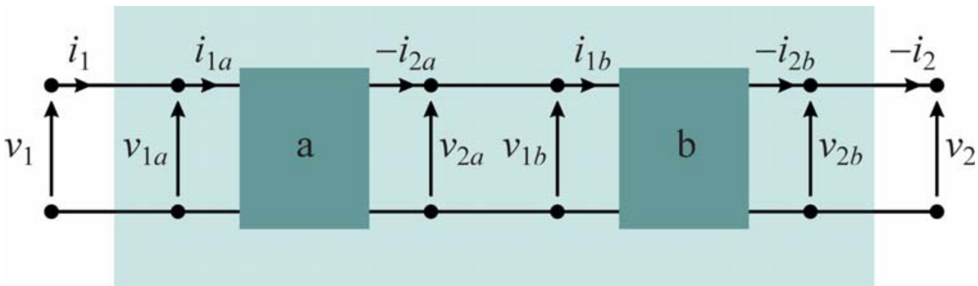


$$\begin{bmatrix} i_{1a} \\ v_{2a} \end{bmatrix} = \mathbf{H}'_a \begin{bmatrix} v_{1a} \\ i_{2a} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} i_{1b} \\ v_{2b} \end{bmatrix} = \mathbf{H}'_b \begin{bmatrix} v_{1b} \\ i_{2b} \end{bmatrix}$$

➡ $$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \left(\mathbf{H}'_a + \mathbf{H}'_b\right) \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}' \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$ ➡ $$\boxed{\mathbf{H}' = \mathbf{H}'_a + \mathbf{H}'_b}$$

➡ La matrice $\mathbf{H}'$ del doppio bipolo risultante è data dalla somma delle matrici ibride inverse dei due doppi bipoli

Doppi bipoli in cascata



- In questo caso conviene utilizzare le matrici di trasmissione

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_a \begin{bmatrix} v_{2a} \\ -i_{2a} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_{1b} \\ i_{1b} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_b \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

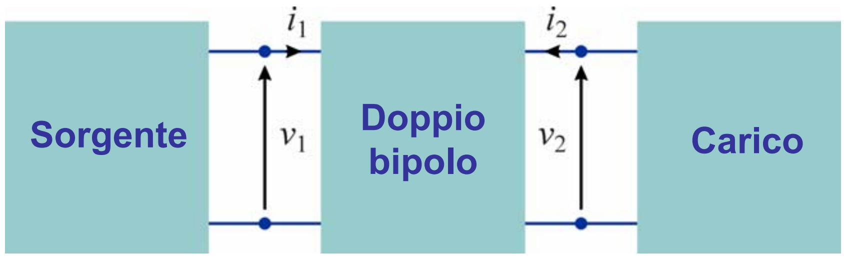
- Le tensioni e le correnti alla porta comune coincidono

  $v_{1b} = v_{2a} \qquad i_{1b} = -i_{2a}$

➡ $$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_a \cdot \mathbf{T}_b \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$ ➡ $$\boxed{\mathbf{T} = \mathbf{T}_a \cdot \mathbf{T}_b}$$

➡ La matrice $\mathbf{T}$ del doppio bipolo risultante è data dal prodotto delle matrici di trasmissione dei due doppi bipoli

Doppi bipoli terminati



- Nelle applicazioni pratiche si incontra spesso il caso in cui le porte di un doppio bipolo sono collegate a due bipoli come mostrato nella figura
- Il primo bipolo costituisce la sorgente del segnale in ingresso al doppio bipolo e può rappresentare il circuito equivalente di Thévenin o Norton degli stati precedenti
- Il secondo bipolo costituisce il carico e può rappresentare l'impedenza equivalente degli stati successivi

Indici degli elementi delle matrici del doppio bipolo

- Quando un doppio bipolo è utilizzato in modo che è possibile attribuire alle due porte i ruoli di ingresso e di uscita, gli indici degli elementi delle matrici del doppio bipolo vengono indicati anche nel modo seguente
  - 11 ➡ i (*input*) ➡ il parametro esprime la relazione tra la tensione e la corrente alla porta di ingresso
  - 21 ➡ f (*forward*) ➡ il parametro indica come ciò che avviene alla porta di ingresso influenza l'uscita
  - 12 ➡ r (*reverse*) ➡ il parametro indica come ciò che avviene alla porta di uscita influenza l'ingresso
  - 22 ➡ o (*output*) ➡ il parametro esprime la relazione tra la tensione e la corrente alla porta di uscita

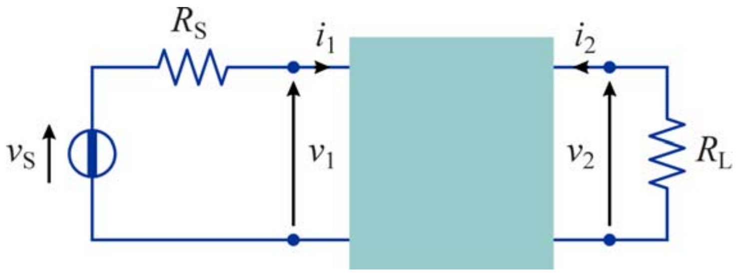
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_\mathrm{i} & r_\mathrm{r} \\ r_\mathbf{f} & r_\mathrm{o} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_\mathrm{i} & g_\mathrm{r} \\ g_\mathbf{f} & g_\mathrm{o} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_\mathrm{i} & h_\mathrm{r} \\ h_\mathbf{f} & h_\mathrm{o} \end{bmatrix}$$

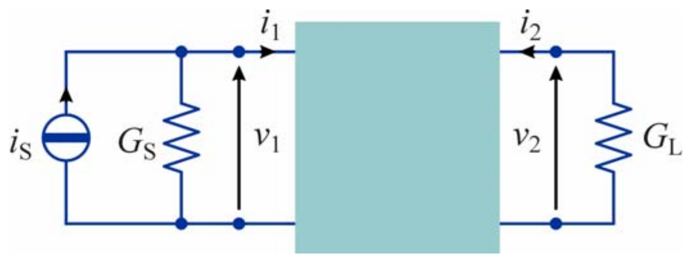
Doppi bipoli unilaterali

- Un doppio bipolo per cui il parametro r è nullo è detto **unilaterale**
  - Un doppio bipolo unilaterale è un componente non reciproco
- In queste condizioni si può avere propagazione del segnale solo dalla porta 1 alla porta 2
  - Eventuali disturbi sovrapposti a v_2 o i_2 nel caso di un doppio bipolo bilaterale vengono trasferiti alla porta 1
  - Nel caso di doppio bipolo unilaterale questi disturbi non possono modificare v_1 e i_1
  - Per un doppio bipolo bilaterale v_1 e i_1 variano al variare del carico
  - Per un doppio bipolo unilaterale v_1 e i_1 sono indipendenti dal carico
- Il fatto che un doppio bipolo sia unilaterale spesso rappresenta una situazione vantaggiosa (più semplice da gestire)
- In pratica, di solito non possibile fare in modo che il parametro r sia esattamente zero, ma solo che sia molto piccolo rispetto al parametro f

Funzioni di rete

- La sorgente viene rappresentata mediante un circuito equivalente di tipo Thévenin o Norton
- Il carico viene rappresentato mediante una resistenza equivalente





Funzioni di rete

- Equazioni della sorgente

$$v_1 = v_S - R_S i_1 \qquad i_1 = i_S - G_S v_1$$

- Equazioni del doppio bipolo

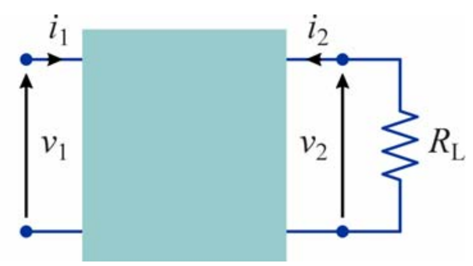
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_i & r_r \\ r_f & r_o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_i & g_r \\ g_f & g_o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_i & h_r \\ h_f & h_o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

- Equazioni del carico

$$v_2 = -R_L i_2 \qquad i_2 = -G_L v_2$$

- Scelta la rappresentazione del doppio bipolo, le equazioni consentono di ricavare le tensioni e le correnti alle porte
- Inoltre è possibile determinare delle **funzioni di rete** che esprimono le relazioni tra le tensione e le correnti alle porte
- In seguito, come esempio, si farà uso della matrice ibrida, ma il procedimento può essere esteso facilmente alle altre rappresentazioni

Guadagno di corrente



$$v_1 = h_i i_1 + h_r v_2$$
$$i_2 = h_f i_1 + h_o v_2$$
$$v_2 = -R_L i_2$$

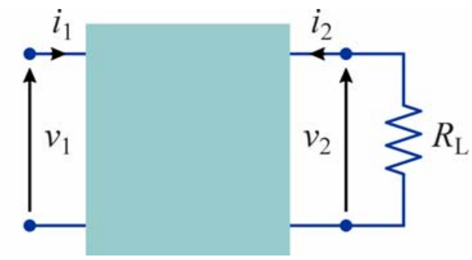
- Combinando l'equazione del carico con la seconda equazione del doppio bipolo si ottiene la relazione tra le correnti di ingresso e di uscita

$$i_2 = h_f i_1 - h_o R_L i_2 \quad \Rightarrow \quad i_2 = \frac{h_f}{1 + h_o R_L} i_1$$

➡ Il **guadagno di corrente** è $A_i = \dfrac{i_2}{i_1} = \dfrac{h_f}{1 + h_o R_L}$

- In particolare se si annulla la resistenza di carico si ha $A_{icc} = \dfrac{i_2}{i_1} = h_f$

Guadagno di tensione



$$v_1 = h_i i_1 + h_r v_2$$
$$i_2 = h_f i_1 + h_o v_2$$
$$i_2 = -G_L v_2$$

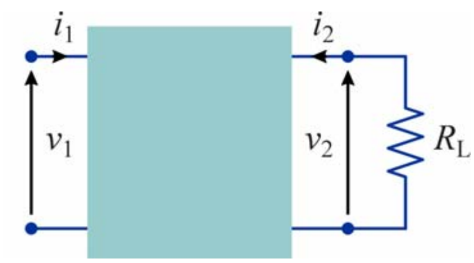
- Eliminando i_1 e i_2 dalle equazioni si ottiene la relazione tra le tensioni di ingresso e di uscita

$$-G_L v_2 = h_f i_1 + h_o v_2 \Rightarrow i_1 = -\frac{h_o + G_L}{h_f} v_2 \Rightarrow v_1 = \left(-h_i \frac{h_o + G_L}{h_f} + h_r\right) v_2$$

➡ Il **guadagno di tensione** è $A_v = \dfrac{v_2}{v_1} = -\dfrac{h_f}{h_i h_o - h_r h_f + h_i G_L} = -\dfrac{h_f}{\Delta\mathbf{H} + h_i G_L}$

- In particolare nel funzionamento a vuoto si ha $A_{v0} = -\dfrac{h_f}{\Delta\mathbf{H}}$

Resistenza di ingresso



$$v_1 = h_i i_1 + h_r v_2$$
$$i_2 = h_f i_1 + h_o v_2$$
$$v_2 = -R_L i_2$$

- La **resistenza di ingresso** del doppio bipolo caricato si ottiene eliminando i_2 e v_2 dalle equazioni

$$i_2 = \frac{h_f}{1 + h_o R_L} i_1 \Rightarrow v_1 = h_i i_1 - h_r R_L i_2 = \left(h_i - \frac{h_r h_f R_L}{1 + h_o R_L}\right) i_1 \Rightarrow$$

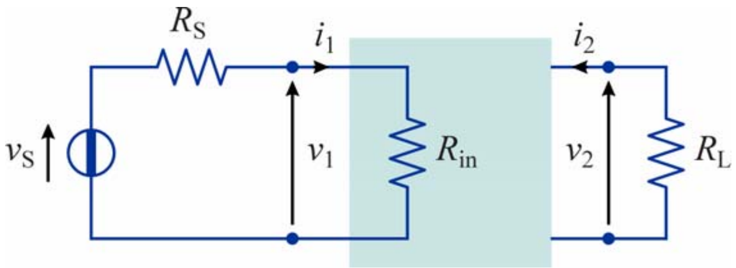
$$R_{in} = \frac{v_1}{i_1} = h_i - \frac{h_r h_f R_L}{1 + h_o R_L} = h_i - \frac{h_r h_f}{h_o + G_L}$$

- In particolare a vuoto e in cortocircuito si ottiene, rispettivamente

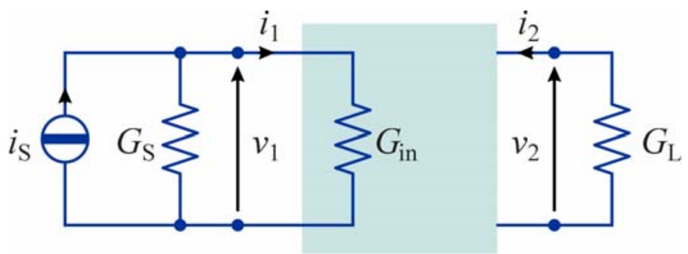
$$R_{in0} = \frac{v_1}{i_1} = h_i - \frac{h_r h_f}{h_o} = \frac{\Delta\mathbf{H}}{h_o} \qquad R_{incc} = h_i$$

Guadagni di tensione e corrente riferiti al generatore

- Per calcolare i guadagni riferiti ai generatori si moltiplicano i guadagni di tensione e di corrente riferiti alla porta 1 per i fattori di partizione che legano, rispettivamente, v_S a v_1 e i_S a i_1

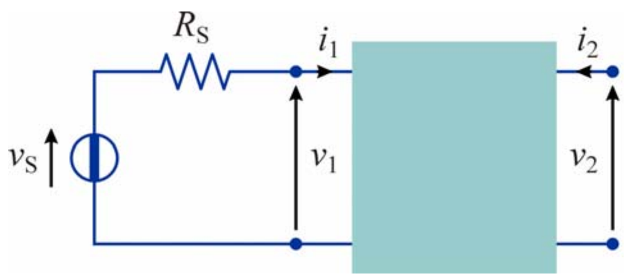


$$A_{VS} = \frac{v_2}{v_S} = \frac{v_1}{v_S}\frac{v_2}{v_1} = \frac{R_{in}}{R_S + R_{in}} A_V$$



$$A_{IS} = \frac{i_2}{i_S} = \frac{i_1}{i_S}\frac{i_2}{i_1} = \frac{G_{in}}{G_S + G_{in}} A_I$$

Equazione di uscita



$$v_1 = v_S - R_S i_1$$
$$v_1 = h_i i_1 + h_r v_2$$
$$i_2 = h_f i_1 + h_o v_2$$

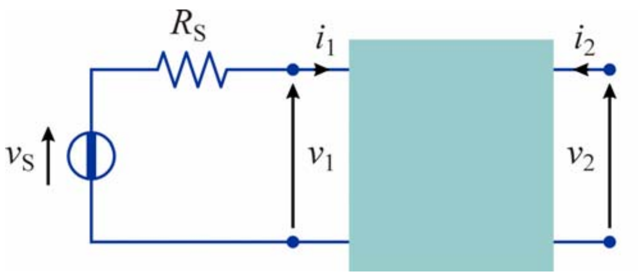
- Eliminando i_1 e v_1, si ottiene la relazione che lega la tensione e la corrente alla porta 2

$$v_S - R_S i_1 = h_i i_1 + h_r v_2 \quad \Rightarrow \quad i_1 = \frac{v_S - h_r v_2}{h_i + R_S} \quad \Rightarrow$$

$$i_2 = \frac{h_f}{h_i + R_S} V_S + \left(h_o - \frac{h_r h_f}{h_i + R_S} \right) v_2$$

- A partire da questa relazione di possono ricavare i circuiti equivalenti di Thévenin e Norton del bipolo ottenuto collegando la sorgente e il doppio bipolo

Resistenza di uscita



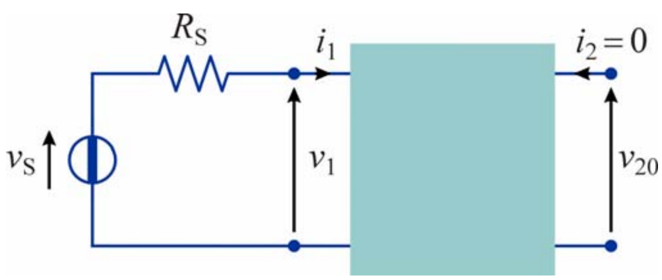
- La **resistenza di uscita** si ottiene azzerando il generatore

$$v_S = 0 \quad \Rightarrow \quad i_2 = \left(h_o - \frac{h_r h_f}{h_i + R_S}\right) v_2 \quad \Rightarrow \quad R_{out} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{V_S=0} = \left(h_o - \frac{h_r h_f}{h_i + R_S}\right)^{-1}$$

- Nei casi particolari di $R_S = 0$ o $G_S = 0$ si ha rispettivamente

$$R_{outcc} = \left(h_o - \frac{h_r h_f}{h_i}\right)^{-1} = \frac{h_i}{\Delta \mathbf{H}} \qquad\qquad R_{out0} = \frac{1}{h_o}$$

Tensione a vuoto



$$i_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_{20}$$

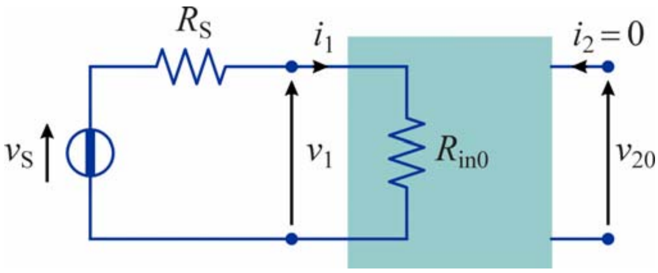
- La **tensione di uscita a vuoto** si ottiene ponendo $i_2 = 0$ nell'equazione di uscita

$$\frac{h_f}{h_i + R_S} v_S + \left(h_o - \frac{h_r h_f}{h_i + R_S}\right) v_{20} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{20} = -\frac{h_f}{h_o h_i - h_r h_f + h_o R_S} v_S$$

- La relazione tra la tensione a vuoto e la tensione del generatore è

$$\frac{v_{20}}{v_S} = -\frac{h_f}{\Delta \mathbf{H} + h_o R_S}$$

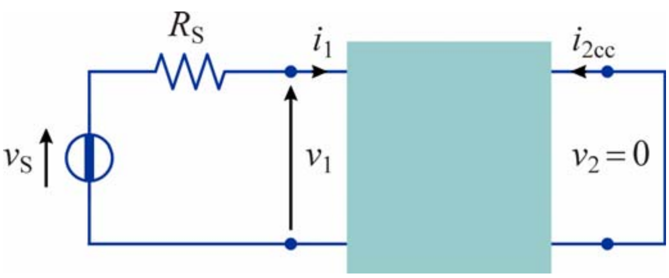
Tensione a vuoto



- Lo stesso risultato si può ottenere utilizzando la resistenza di ingresso a vuoto per determinare v_1 e quindi moltiplicando v_1 per il guadagno di tensione a vuoto

$$v_{20} = v_S \frac{R_{in0}}{R_{in0} + R_G} A_{v0} = v_S \frac{\dfrac{\Delta\mathbf{H}}{h_o}}{\dfrac{\Delta\mathbf{H}}{h_o} + R_G}\left(-\frac{h_f}{\Delta\mathbf{H}}\right) = -\frac{h_f}{\Delta\mathbf{H} + h_o R_G} v_S$$

Corrente di cortocircuito



$$v_2 = 0 \;\Rightarrow\; i_2 = i_{2cc}$$

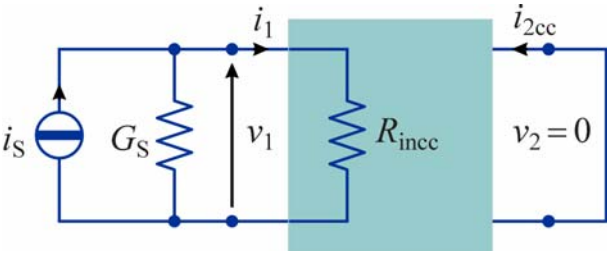
- La **corrente di uscita in cortocircuito** si ottiene ponendo $v_2 = 0$ nell'equazione di uscita

$$i_{2cc} = \frac{h_f}{h_i + R_S} v_S = \frac{h_f}{1 + h_i G_S} i_S$$

- La relazione tra la corrente di cortocircuito e la corrente i_S è

$$\frac{i_{2cc}}{i_S} = \frac{h_f}{1 + h_i G_S}$$

Corrente di cortocircuito

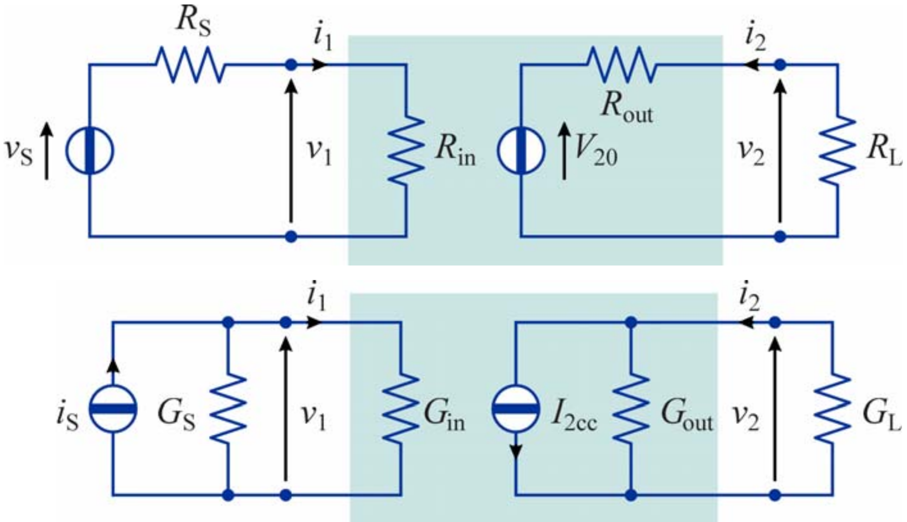


- Lo stesso risultato si può ottenere utilizzando la resistenza di ingresso in cortocircuito per determinare i_1 e quindi moltiplicando i_1 per il guadagno di corrente in cortocircuito

$$i_{2cc} = i_S \frac{R_S}{R_{incc} + R_S} A_{icc} = i_S \frac{R_S}{h_i + R_S} h_f = i_S \frac{h_f}{1 + h_i G_S} h_f$$

Circuiti equivalenti del doppio bipolo

- Dal punto di vista della sorgente, il doppio bipolo può essere rappresentato da una resistenza equivalente R_{in} che, in generale, dipende dalla resistenza di carico R_L
- Dal punto di vista del carico, il doppio bipolo può essere rappresentato mediante un circuito equivalente di tipo Thévenin o Norton, i cui parametri, in generale, dipendono dalla resistenza del generatore R_S



Funzioni di rete espresse con i parametri R, G e H

	R	**G**	**H**
A_v	$\dfrac{r_f R_L}{\Delta\mathbf{R} + r_i R_L}$	$-\dfrac{g_f}{g_o + G_L}$	$-\dfrac{h_f}{\Delta\mathbf{H} + h_i G_L}$
A_i	$-\dfrac{r_f}{r_o + R_L}$	$\dfrac{g_f G_L}{\Delta\mathbf{G} + g_i G_L}$	$\dfrac{h_f}{1 + h_o R_L}$
R_{in}	$r_i - \dfrac{r_r r_f}{r_o + R_L}$	$\left(g_i - \dfrac{g_r g_f}{g_o + G_L}\right)^{-1}$	$h_i - \dfrac{h_r h_f}{h_o + G_L}$
R_{out}	$r_o - \dfrac{r_r r_f}{r_i + R_S}$	$\left(g_o - \dfrac{g_r g_f}{g_i + G_S}\right)^{-1}$	$\left(h_o - \dfrac{h_r h_f}{h_i + R_S}\right)^{-1}$
$\dfrac{v_{20}}{v_S}$	$\dfrac{r_f}{r_i + R_S}$	$-\dfrac{g_f}{\Delta\mathbf{G} R_S + g_o}$	$-\dfrac{h_f}{\Delta\mathbf{H} + h_o G_S}$
$\dfrac{i_{2cc}}{i_S}$	$-\dfrac{r_f}{\Delta\mathbf{R} G_S + r_o}$	$\dfrac{g_f}{g_i + G_S}$	$\dfrac{h_f}{1 + h_i G_S}$

Funzioni di rete espresse con i parametri R, G e H

	R	**G**	**H**
A_{v0}	$\dfrac{r_f}{r_i}$	$-\dfrac{g_f}{g_o}$	$-\dfrac{h_f}{\Delta\mathbf{H}}$
A_{icc}	$-\dfrac{r_f}{r_o}$	$\dfrac{g_f}{g_i}$	h_f
R_{in0}	r_i	$\dfrac{g_o}{\Delta\mathbf{G}}$	$\dfrac{\Delta\mathbf{H}}{h_o}$
R_{incc}	$\dfrac{\Delta\mathbf{R}}{r_o}$	$\dfrac{1}{g_i}$	h_i
R_{out0}	r_o	$\dfrac{g_i}{\Delta\mathbf{G}}$	$\dfrac{1}{h_o}$
R_{outcc}	$\dfrac{\Delta\mathbf{R}}{r_i}$	$\dfrac{1}{g_o}$	$\dfrac{h_i}{\Delta\mathbf{H}}$

Resistenza caratteristica

- Il valore della resistenza di carico R_L per cui risulta $R_\mathrm{in} = R_\mathrm{L}$ è detto **resistenza caratteristica** e viene indicato con R_0
- Utilizzando le espressioni ricavate per R_in e imponendo $R_\mathrm{in} = R_\mathrm{L} = R_0$ si ottiene

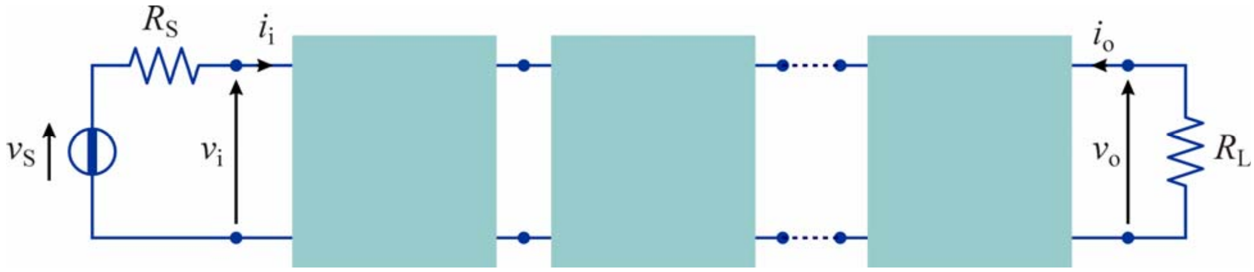
$$R_0 = \frac{(r_\mathrm{i} - r_\mathrm{o}) \pm \sqrt{(r_\mathrm{i} + r_\mathrm{o})^2 - 4 r_\mathrm{r} r_\mathrm{f}}}{2} =$$

$$= \left[\frac{(g_\mathrm{i} - g_\mathrm{o}) \pm \sqrt{(g_\mathrm{i} + g_\mathrm{o})^2 - 4 g_\mathrm{r} g_\mathrm{f}}}{2} \right]^{-1} =$$

$$= \frac{(\Delta\mathbf{H} - 1) \pm \sqrt{(\Delta\mathbf{H} - 1)^2 + 4 h_\mathrm{i} h_\mathrm{o}}}{2 h_\mathrm{o}}$$

- Quando $R_\mathrm{L} = R_0$ si dice che il doppio bipolo è **adattato**

Doppi bipoli in cascata



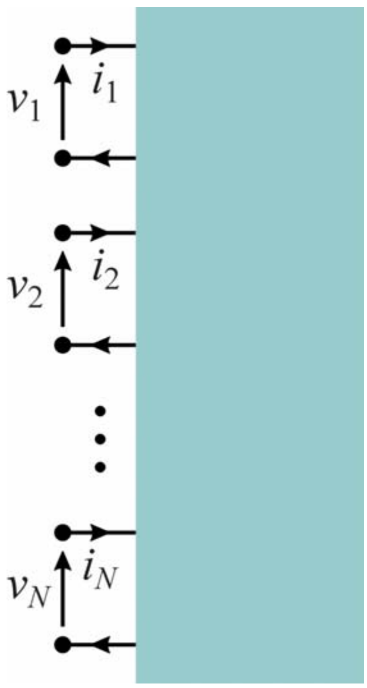
- Nella pratica si presenta frequentemente il caso in cui un sistema è costituito da più doppi bipoli collegati in cascata
- Le funzioni che descrivono il comportamento del doppio bipolo risultante non sono legate in modo semplice alle funzioni di rete relative ai singoli componenti
- Non è semplice ricavare come cambia il comportamento del sistema se viene variata la sua configurazione (per es. se viene eliminato uno dei moduli o ne viene aggiunto un altro)

Doppi bipoli in cascata

- In alcuni casi particolari il problema può essere semplificato
  - Per esempio, se tutti i doppi bipoli hanno resistenza di ingresso molto elevata e resistenza di uscita molto piccola il guadagno di tensione complessivo è circa uguale al prodotto dei loro guadagni a vuoto
  - Questa situazione non è sempre facilmente realizzabile (specialmente nel caso di doppi bipoli passivi)
- Se tutti i doppi bipoli hanno la stessa resistenza caratteristica
  - ➡ il doppio bipolo risultante ha ancora la stessa resistenza caratteristica
  - ➡ in condizioni di adattamento il guadagno complessivo si ottiene moltiplicando i guadagni dei singoli doppi bipoli
- Questa scelta trova numerose applicazioni pratiche
  - Es. sistemi a 600 Ω usati in telefonia, sistemi a 50 Ω utilizzati a radiofrequenza e per strumenti di misura

N-porte resistivi

- Componenti con $2N$ terminali che costituiscono N porte
  - per ciascuna porta la corrente entrante in uno dei terminali è uguale a quella uscente dall'altro



- Relazioni costitutive

$$f_1[v_1,\ldots,v_N,i_1,\ldots i_N,t]=0$$
$$\vdots$$
$$f_N[v_1,\ldots,v_N,i_1,\ldots i_N,t]=0$$

f_1, ..., f_N funzioni generiche

- Se il tempo non compare esplicitamente nelle funzioni il componente è detto **tempo-invariante**

N-porte lineari tempo-invarianti

- Nel caso più generale le equazioni costitutive di un N-porte **lineare** e **tempo-invariante** sono del tipo

$$
\begin{aligned}
&a_{11}v_1 + \cdots + a_{1N}v_N + b_{11}i_1 + \cdots + b_{1N}i_N = 0\\
&\vdots\\
&a_{N1}v_1 + \cdots + a_{NN}v_N + b_{11}i_1 + \cdots + b_{NN}i_N = 0
\end{aligned}
$$

- Queste equazioni possono essere scritte nella forma

$$\mathbf{Av} + \mathbf{Bi} = \mathbf{0}$$

dove

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & \cdots & b_{NN} \end{bmatrix}$$

Rappresentazioni di un N-porte lineare

- **Parametri di resistenza**

$$\mathbf{v} = \mathbf{Ri} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{N1} & \cdots & r_{NN} \end{bmatrix}$$

- **Parametri di conduttanza**

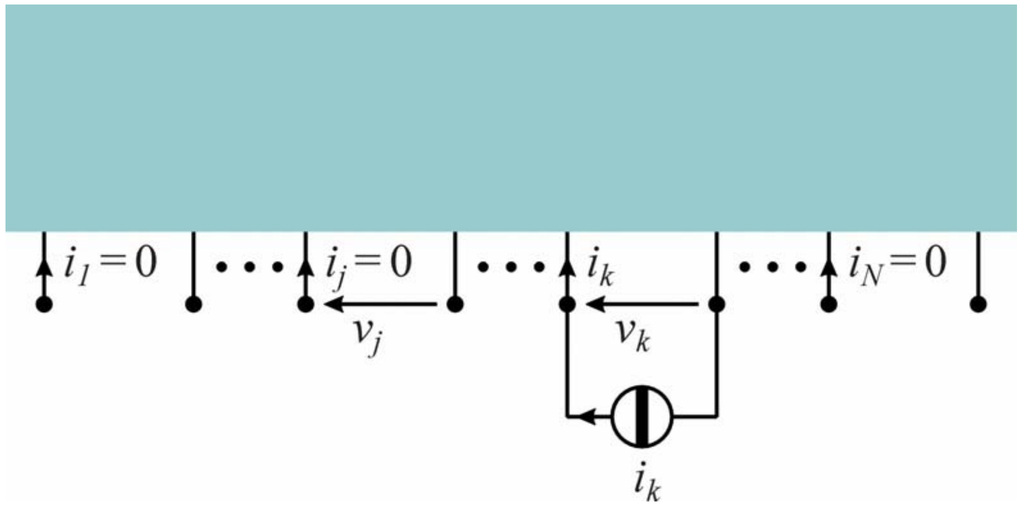
$$\mathbf{i} = \mathbf{Gv} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix}$$

- Se l'N-porte ammette entrambe le rappresentazioni, si ha

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1} \qquad \mathbf{R} = \mathbf{G}^{-1}$$

- Le altre possibili rappresentazioni sono dette **ibride**

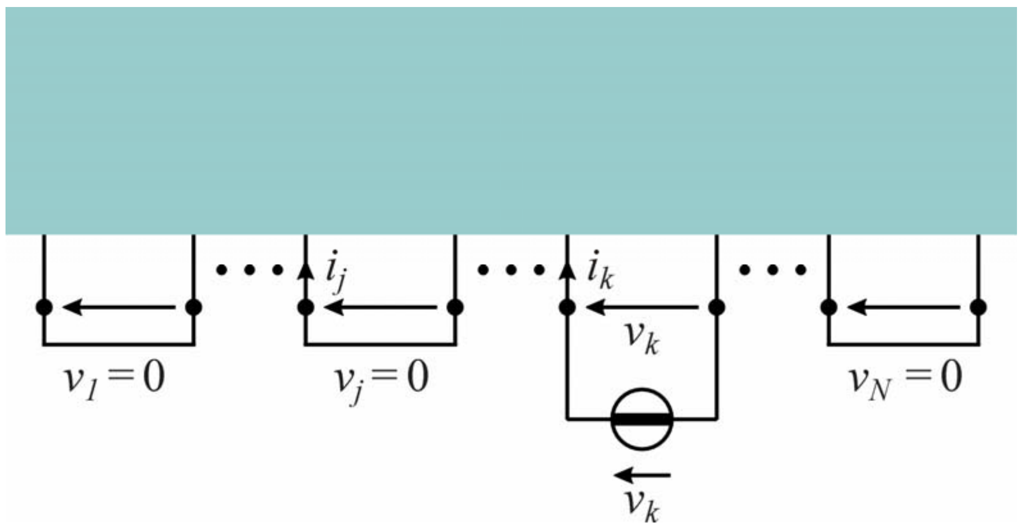
Significato dei parametri di resistenza



$$r_{jk} = \left.\frac{v_j}{i_k}\right|_{i_h=0\ \forall h\neq k}$$

Rapporto tra la tensione alla porta j e la corrente alla porta k quando tutte le porte diverse dalla k-esima sono a vuoto

Significato dei parametri di conduttanza



$$g_{jk} = \left.\frac{i_j}{v_k}\right|_{v_h=0\ \forall h\neq k}$$

Rapporto tra la corrente alla porta j e la tensione alla porta k quando tutte le porte diverse dalla k-esima sono in cortocircuito

Reciprocità

- Si dice che un N-porte è reciproco se, dati due generici insiemi di tensioni e correnti v'_k, i'_k e v''_k, i''_k $(k = 1,\ldots,N)$ compatibili con le sue equazioni caratteristiche, è verificata la relazione

$$\sum_{k=1}^{N} v'_k i''_k = \sum_{k=1}^{N} v''_k i'_k$$

➡ Se il componente ammette la matrice di resistenza vale la relazione

$$r_{jk} = r_{kj} \quad \forall k \neq j$$

➡ Se il componente ammette la matrice di conduttanza vale la relazione

$$g_{jk} = g_{kj} \quad \forall k \neq j$$

Teorema di reciprocità

- *Un N-porte ottenuto connettendo componenti resistivi reciproci è reciproco*

Dimostrazione

- Premessa: per un resistore la condizione di reciprocità è sempre verificata, infatti

$$\begin{array}{l} v' = Ri' \\ v'' = Ri'' \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} v'i'' = Ri'i'' \\ v''i' = Ri''i' \end{array} \Rightarrow v'i'' = v''i'$$

- Si considerano due condizioni di funzionamento dell'N-porte, in cui le porte vengono collegate a due insiemi arbitrari di N bipoli, scelti con l'unico vincolo che i circuiti ottenuti dal collegamento ammettano soluzione unica
- Si indica con l il numero totale di lati dei circuiti così ottenuti e si attribuiscono i numeri da 1 a N ai bipoli collegati alle porte

Teorema di reciprocità

Dimostrazione

- Si indicano le tensioni e le correnti relative ai due funzionamenti con
  $v'_1, \dots, v'_l \;\; i'_1, \dots, i'_l$ e $v''_1, \dots, v''_l \;\; i''_1, \dots, i''_l$
- Per il teorema di Tellegen si ha
  $$\sum_{k=1}^{N} v'_k i''_k + \sum_{k=N+1}^{l} v'_k i''_k = 0 \qquad \sum_{k=1}^{N} v''_k i'_k + \sum_{k=N+1}^{l} v''_k i'_k = 0$$
- Se l'N-porte è formato da componenti reciproci, i secondi addendi di queste equazioni sono uguali
  $$\sum_{k=N+1}^{l} v'_k i''_k = \sum_{k=N+1}^{l} v''_k i'_k$$
- ➡ Questo richiede che siano uguali i primi addendi, cioè che le tensioni e le correnti dell'N-polo risultante soddisfino la condizione di reciprocità
  $$\sum_{k=1}^{N} v'_k i''_k = \sum_{k=1}^{N} v''_k i'_k$$

N-porte dinamici

- Per una rete lineare dinamica a N porte le relazioni tra le correnti e le tensioni alle porte sono di tipo differenziale lineare omogeneo
- In condizioni di regime sinusoidale, applicando la trasformata di Steinmetz si ottengono relazioni lineari algebriche omogenee tra i fasori delle tensioni $\mathbf{V}_1 ... \mathbf{V}_\mathrm{N}$ e delle correnti $\mathbf{I}_1 ... \mathbf{I}_\mathrm{N}$ del tipo
  $$\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{i} = \mathbf{0}$$
  dove
  $$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \cdots & \mathbf{a}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{N1} & \cdots & \mathbf{a}_{NN} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} & \cdots & \mathbf{b}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}_{N1} & \cdots & \mathbf{b}_{NN} \end{bmatrix}$$
- Le equazioni hanno la stessa forma delle equazioni di un N-porte resistivo, ma in questo caso le matrici hanno coefficienti complessi dipendenti dalla pulsazione

Matrici di impedenza e di ammettenza

- Se il componente è comandato in corrente oppure in tensione è possibile rappresentarlo mediante **parametri di impedenza o di ammettenza** che costituiscono l'estensione al caso dei regimi sinusoidale dei parametri di resistenza e di conduttanza
- **Matrice di impedenza**

$$\mathbf{v} = \mathbf{Z}\mathbf{i} \qquad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \cdots & \mathbf{z}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{z}_{N1} & \cdots & \mathbf{z}_{NN} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{z}_{jk} = \left.\frac{\mathbf{V}_j}{\mathbf{I}_k}\right|_{\mathbf{I}_h=0\ \forall h\neq k}$$

- **Matrice di ammettenza**

$$\mathbf{i} = \mathbf{Y}\mathbf{v} \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \cdots & \mathbf{y}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_{N1} & \cdots & \mathbf{y}_{NN} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}_{jk} = \left.\frac{\mathbf{I}_j}{\mathbf{V}_k}\right|_{\mathbf{V}_h=0\ \forall h\neq k}$$

Matrici ibride e matrici di trasmissione

- Per i componenti a due porte si possono estendere al regime sinusoidale le definizioni delle matrici ibride e di trasmissione (in questo caso i coefficienti sono complessi e dipendono da ω)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

Matrice ibrida

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}'_{11} & \mathbf{h}'_{12} \\ \mathbf{h}'_{21} & \mathbf{h}'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}' \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

Matrice ibrida inversa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

Matrice di trasmissione

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \mathbf{C}' & \mathbf{D}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ -\mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}' \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ -\mathbf{I}_1 \end{bmatrix}$$

Matrice di trasmissione inversa

Relazioni tra le rappresentazioni dei doppi bipoli

	Z	Y	H	H′	T	T′
Z	$\begin{matrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{y_{22}}{\Delta Y} & -\frac{y_{12}}{\Delta Y} \\ -\frac{y_{21}}{\Delta Y} & \frac{y_{11}}{\Delta Y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta H}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h'_{11}} & -\frac{h'_{12}}{h'_{11}} \\ \frac{h'_{21}}{h'_{11}} & \frac{\Delta H'}{h'_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta T}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D'}{C'} & \frac{1}{C'} \\ \frac{\Delta T'}{C'} & \frac{A'}{C'} \end{matrix}$
Y	$\begin{matrix} \frac{z_{22}}{\Delta Z} & -\frac{z_{12}}{\Delta Z} \\ -\frac{z_{21}}{\Delta Z} & \frac{z_{11}}{\Delta Z} \end{matrix}$	$\begin{matrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta H}{h_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta H'}{h'_{22}} & \frac{h'_{12}}{h'_{22}} \\ -\frac{h'_{21}}{h'_{22}} & \frac{1}{h'_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{B} & -\frac{\Delta T}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A'}{B'} & -\frac{1}{B'} \\ -\frac{\Delta T'}{B'} & \frac{D'}{B'} \end{matrix}$
H	$\begin{matrix} \frac{\Delta Z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ -\frac{z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{y_{11}} & -\frac{y_{12}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{11}} & \frac{\Delta Y}{y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h'_{22}}{\Delta H} & -\frac{h'_{12}}{\Delta H} \\ -\frac{h'_{21}}{\Delta H} & \frac{h'_{11}}{\Delta H} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta T}{D} \\ -\frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B'}{A'} & \frac{1}{A'} \\ -\frac{\Delta T'}{A'} & \frac{C'}{A'} \end{matrix}$
H′	$\begin{matrix} \frac{1}{z_{11}} & -\frac{z_{12}}{z_{11}} \\ \frac{z_{21}}{z_{11}} & \frac{\Delta Z}{z_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta Y}{y_{22}} & \frac{y_{12}}{y_{22}} \\ -\frac{y_{21}}{y_{22}} & \frac{1}{y_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h_{22}}{\Delta H} & -\frac{h_{12}}{\Delta H} \\ -\frac{h_{21}}{\Delta H} & \frac{h_{11}}{\Delta H} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C}{A} & -\frac{\Delta T}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{B}{A} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C'}{D'} & -\frac{1}{D'} \\ \frac{\Delta T'}{D'} & \frac{A'}{D'} \end{matrix}$
T	$\begin{matrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & \frac{\Delta Z}{z_{21}} \\ \frac{1}{z_{21}} & \frac{z_{22}}{z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{y_{22}}{y_{21}} & -\frac{1}{y_{21}} \\ -\frac{\Delta Y}{y_{21}} & -\frac{y_{11}}{y_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta H}{h_{21}} & -\frac{h_{11}}{h_{21}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{21}} & -\frac{1}{h_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h'_{21}} & \frac{h'_{22}}{h'_{21}} \\ \frac{h'_{11}}{h'_{21}} & \frac{\Delta H'}{h'_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D'}{\Delta T'} & \frac{B'}{\Delta T'} \\ \frac{C'}{\Delta T'} & \frac{A}{\Delta T'} \end{matrix}$
T′	$\begin{matrix} \frac{z_{22}}{z_{21}} & \frac{\Delta Z}{z_{12}} \\ \frac{1}{z_{12}} & \frac{z_{11}}{z_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{y_{11}}{y_{12}} & -\frac{1}{y_{12}} \\ -\frac{\Delta Y}{y_{12}} & -\frac{y_{11}}{y_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{12}} & \frac{h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{h_{22}}{h_{12}} & \frac{\Delta H}{h_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta H'}{h'_{12}} & -\frac{h'_{22}}{h'_{12}} \\ -\frac{h'_{11}}{h'_{12}} & -\frac{1}{h'_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{\Delta T} & \frac{B}{\Delta T} \\ \frac{C}{\Delta T} & \frac{A}{\Delta T} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A' & B' \\ C' & D' \end{matrix}$

$\Delta \mathbf{M} = \det(\mathbf{M})$

Ogni riga riporta le espressioni dei coefficienti di una matrice in funzione dei coefficienti delle matrici indicate nelle intestazioni delle colonne

Circuiti con doppi bipoli dinamici

- Facendo uso della trasformata di Steinmetz, nel caso di circuiti in regime sinusoidale, o, più in generale, della trasformata di Fourier è possibile estendere ai circuiti contenenti doppi bipoli dinamici tutti i risultati ricavati per i doppi bipoli e per gli N-porte resistivi
- In particolare si possono generalizzare
  - i circuiti equivalenti dei doppi bipoli
  - i teoremi di rappresentazione dei doppi bipoli
  - le relazioni relative ai collegamenti tra doppi bipoli
  - il teorema di reciprocità
  - le definizioni delle funzioni di rete, che in questo caso divengono funzioni a valori complessi della pulsazione ω

Funzioni di rete espresse con i parametri Z, Y e H

	Z	Y	H
A_v	$\frac{z_f Z_L}{\Delta Z + z_i Z_L}$	$-\frac{y_f}{y_o + Y_L}$	$-\frac{h_f}{\Delta H + h_i Y_L}$
A_i	$-\frac{z_f}{z_o + Z_L}$	$\frac{y_f Y_L}{\Delta G + y_i Y_L}$	$\frac{h_f}{1 + h_o Z_L}$
Z_{in}	$z_i - \frac{z_r z_f}{z_o + Z_L}$	$\left(y_i - \frac{y_r y_f}{y_o + Y_L}\right)^{-1}$	$h_i - \frac{h_r h_f}{h_o + Y_L}$
Z_{out}	$z_o - \frac{z_r z_f}{z_i + Z_S}$	$\left(y_o - \frac{y_r y_f}{y_i + Y_S}\right)^{-1}$	$\left(h_o - \frac{h_r h_f}{h_i + Z_S}\right)^{-1}$
$\frac{V_{20}}{V_S}$	$\frac{z_f}{z_i + Z_S}$	$-\frac{y_f}{\Delta Y Z_S + y_o}$	$-\frac{h_f}{\Delta H + h_o Y_S}$
$\frac{I_{2cc}}{I_S}$	$-\frac{z_f}{\Delta Z G_S + z_o}$	$\frac{y_f}{y_i + Y_S}$	$\frac{h_f}{1 + h_i Y_S}$

Funzioni di rete espresse con i parametri Z, Y e H

	Z	Y	H
A_{v0}	$\frac{z_f}{z_i}$	$-\frac{y_f}{y_o}$	$-\frac{h_f}{\Delta H}$
A_{icc}	$-\frac{z_f}{z_o}$	$\frac{y_f}{y_i}$	h_f
Z_{in0}	z_i	$\frac{y_o}{\Delta Y}$	$\frac{\Delta H}{h_o}$
Z_{incc}	$\frac{\Delta Z}{z_o}$	$\frac{1}{y_i}$	h_i
Z_{out0}	z_o	$\frac{y_i}{\Delta Y}$	$\frac{1}{h_o}$
Z_{outcc}	$\frac{\Delta Z}{z_i}$	$\frac{1}{y_o}$	$\frac{h_i}{\Delta H}$