Principio di sostituzione - I

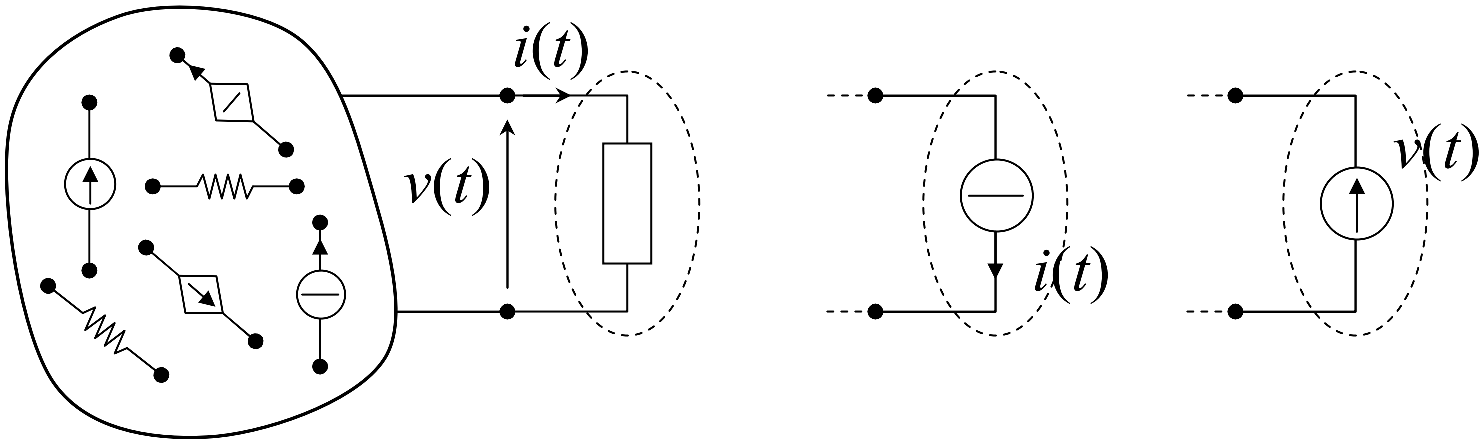
In una rete elettrica (lineare o non-lineare) un componente elettrico, o un insieme di componenti elettrici (lineari o non lineari), può essere sostituito con un altro componente o insieme di componenti con lo stesso numero di morsetti e con le stesse relazioni costitutive (legami *v*-*i*) senza che tutte le rimanenti grandezze elettriche della rete subiscano variazioni. Si parla in questo caso di componente equivalente.

In virtù del principio di sostituzione è possibile semplificare (o comunque modificare) la topologia della rete elettrica senza questa subisca variazioni nel suo funzionamento.

Come si vedrà nel seguito, in alcuni casi può essere opportuno semplificare (o comunque modificare) la topologia della rete elettrica, e quindi il corrispondente grafo orientato, prima di procedere con delle metodologie di calcolo di tensioni e/o correnti.

Principio di sostituzione - II

Un'ulteriore formulazione del principio di sostituzione riguarda un bipolo inserito tra una coppia di morsetti di una rete elettrica: se è nota la forma d'onda della tensione $v = v(t)$ o della corrente $i = i(t)$ del bipolo, allora questo può essere sostituito con un generatore di tensione, oppure con un generatore di corrente, con la medesima forma d'onda senza che sia alterato il comportamento elettrico della restante parte della rete.

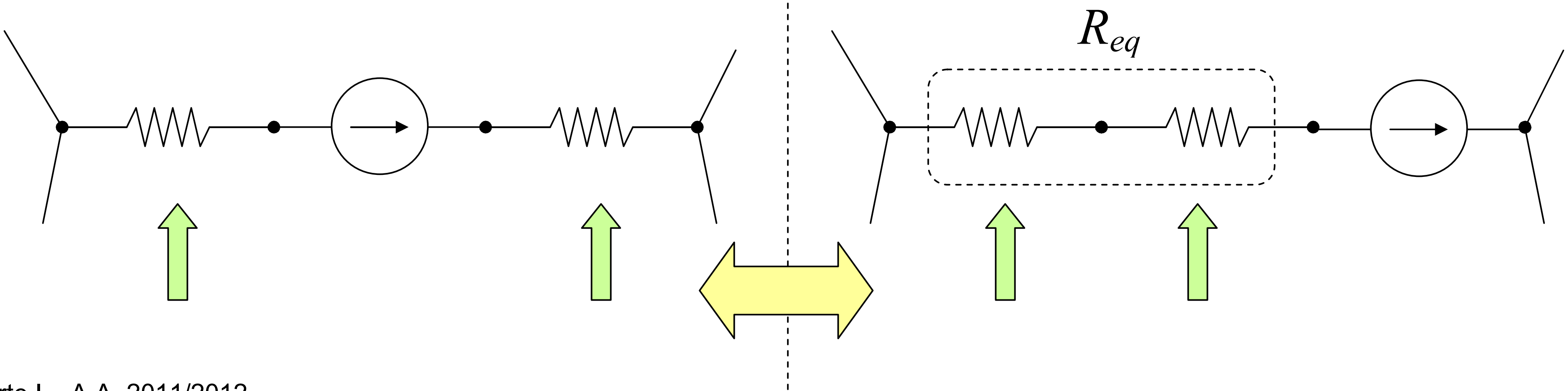


<u>Nota</u>: la sostituzione con il generatore può dar luogo ad una rete indeterminata.

Resistori in serie

Due o più resistori si dicono in serie quando, indipendentemente dallo stato elettrico della rete a cui appartengono, sono attraversati dalla stessa corrente.

I resistori in serie possono anche non avere alcun morsetto in comune. In questo caso è possibile "disegnare diversamente" il circuito in modo da ricondurli ad una connessione nella quale si ha per ogni resistore un morsetto comune unicamente con un solo altro resistore, fatta eccezione per i morsetti di estremità della serie.



Resistori in serie

In base principio di sostituzione è possibile sostituire a più resistori collegati in serie un unico componente, inserito tra il primo e l'ultimo nodo della connessione serie (A e B), avente la stessa relazione di legame v-i. Tale componente è detto <u>resistore equivalente serie</u>, R_{eq}.

Nel caso di due resistori:

$v_{AB} = v_1 + v_2 = R_1\, i_1 + R_2\, i_2 = (R_1 + R_2)\, i_{AB}$ ➔ $R_{eq} = R_1 + R_2$

$v_{AB} = R_{eq}\, i_{AB}$

Nel caso di N resistori:

$$v_{AB} = \sum_{k=1}^{N} v_k = \sum_{k=1}^{N} R_k\, i_k = \left(\sum_{k=1}^{N} R_k \right) i_{AB} \Rightarrow R_{eq} = \sum_{k=1}^{N} R_k\ , \quad \frac{1}{G_{eq}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{G_k}$$

<u>Nota</u>: $R_{eq} > max\ \{R_k\}$, $G_{eq} < min\ \{G_k\}$, se R uguali: $R_{eq} = N \cdot R$

Partitore di tensione

Due o più resistori in serie costituiscono un partitore di tensione. La tensione v_{AB} applicata alla serie si ripartisce infatti sui singoli resistori proporzionalmente al valore delle corrispondenti resistenze, essendo questi interessati dalla stessa corrente i_{AB}.

Nel caso di due resistori:
$$v_2 = R_2\, i_{AB} = R_2 \frac{v_{AB}}{R_1 + R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_{AB}$$

Nel caso di N resistori:
$$v_k = R_k\, i_{AB} = R_k \frac{v_{AB}}{\sum R_h} = \frac{R_k}{\sum R_h} v_{AB}$$

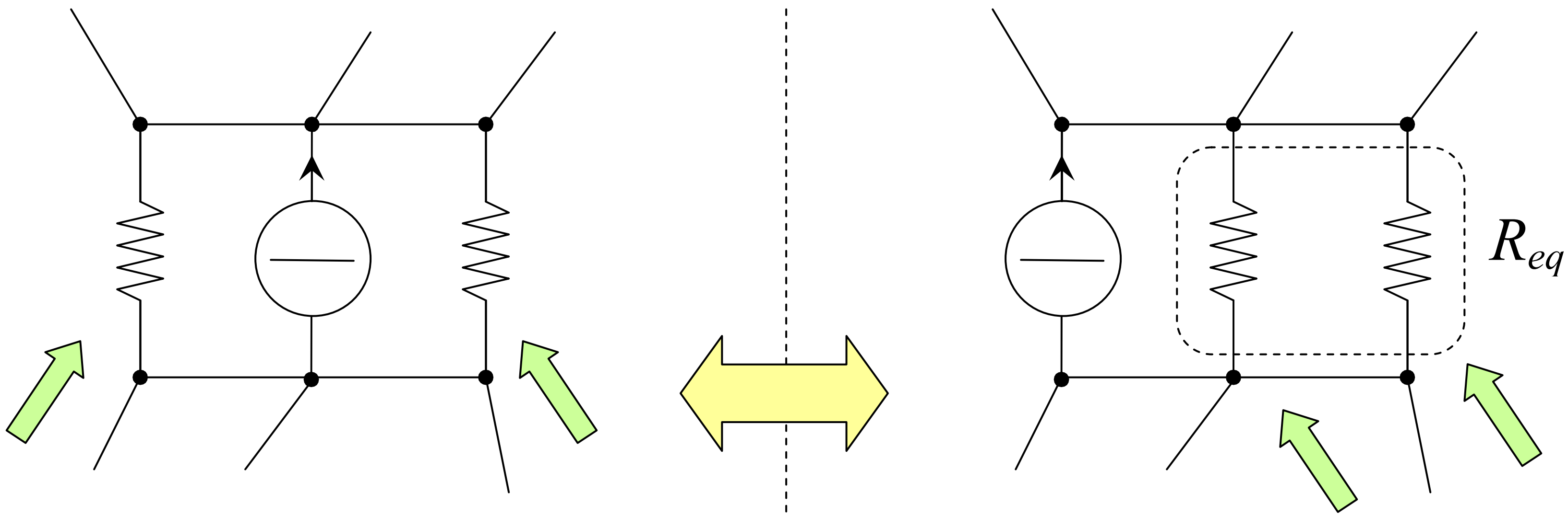
Nota: *la formula del partitore di tensione vale se i resistori sono effettivamente collegati in serie, senza quindi "spillamenti" di corrente nei nodi intermedi*

vedi figure lavagna

Resistori in parallelo

Due o più resistori si dicono in parallelo quando, indipendentemente dallo stato elettrico della rete a cui appartengono, sono sottoposti alla stessa tensione, ovvero, sono collegati tra la stessa coppia di nodi.

I resistori in parallelo possono anche non essere affiancati. In questo caso è possibile "disegnare diversamente" il circuito, accostandoli.



Resistori in parallelo

In base principio di sostituzione è possibile sostituire a più resistori collegati in parallelo un unico componente, inserito i tra due nodi della connessione parallelo (A e B), avente la stessa relazione di legame *v*-*i*. Tale componente è detto <u>resistore equivalente parallelo</u>, R_{eq}.

Nel caso di due resistori:

$$i_{AB} = i_1 + i_2 = G_1 v_1 + G_2 v_2 = (G_1 + G_2)\, v_{AB} \quad \Rightarrow \quad G_{eq} = G_1 + G_2$$

$$i_{AB} = G_{eq}\, v_{AB}$$

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Nel caso di *N* resistori:

$$i_{AB} = \sum_{k=1}^{N} i_k = \sum_{k=1}^{N} G_k v_k = \left(\sum_{k=1}^{N} G_k \right) v_{AB} \quad \Rightarrow \quad G_{eq} = \sum_{k=1}^{N} G_k \,, \quad R_{eq} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k}}$$

<u>Nota</u>: $G_{eq} > max\ \{G_k\}$, $R_{eq} < min\ \{R_k\}$, se R uguali: $R_{eq} = R/N$

Partitore di corrente

Due o più resistori in parallelo costituiscono un partitore di corrente. La corrente complessiva i_{AB} si ripartisce infatti sui singoli resistori proporzionalmente al valore delle corrispondenti conduttanze, essendo questi interessati dalla stessa tensione v_{AB}.

Nel caso di due resistori:

$$i_2 = G_2\, v_{AB} = G_2 \frac{i_{AB}}{G_1 + G_2} = \frac{G_2}{G_1 + G_2}\, i_{AB}$$

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\, i_{AB}$$

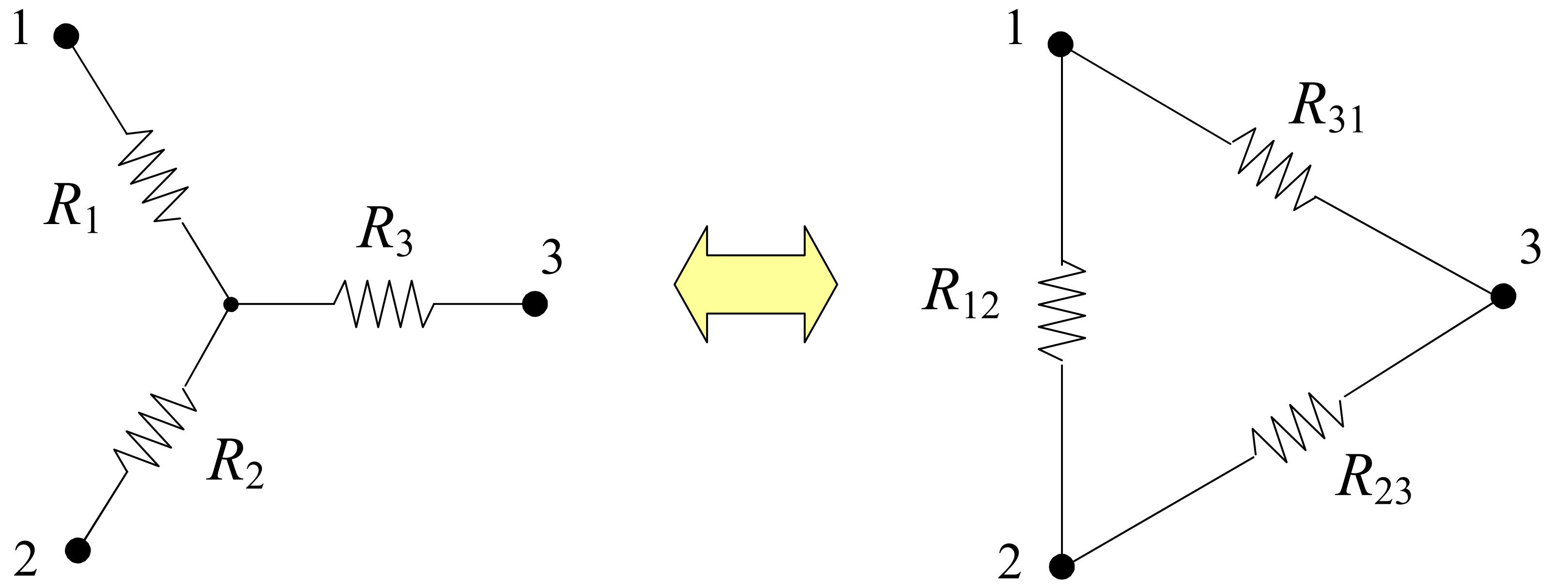
Nel caso di N resistori:

$$i_k = G_k\, v_{AB} = G_k \frac{i_{AB}}{\sum G_h} = \frac{G_k}{\sum G_h}\, i_{AB}$$

vedi figure lavagna

Trasformazione stella/triangolo

Oltre ai collegamenti serie e parallelo, vi sono altre due connessioni tra resistori che consentono trasformazioni topologiche. Sono i cosiddetti collegamenti a **stella** (Y) ed a **triangolo** (Δ). In questo caso si tratta di sottoreti a 3 morsetti, ovvero tripoli, che possono essere rese tra loro equivalenti in virtù del principio di sostituzione.



Trasformazione stella/triangolo

L'equivalenza tra le due configurazioni si esprime mediante il legame tra le resistenze della stella e quelle del triangolo. Per ricavare tali relazioni è sufficiente eguagliare le resistenze equivalenti tra le 3 coppie di morsetti (*una dimostrazione più rigorosa sarà data nella trattazione dei doppi bipoli*).

$$\mathbf{Y}\quad\begin{cases} R_{12}^{eq} = R_1 + R_2 \\ R_{23}^{eq} = R_2 + R_3 \\ R_{31}^{eq} = R_3 + R_1 \end{cases} \qquad\qquad \mathbf{\Delta}\quad\begin{cases} R_{12}^{eq} = \dfrac{R_{12}(R_{31}+R_{23})}{R_{12}+R_{31}+R_{23}} \\ R_{23}^{eq} = \dfrac{R_{23}(R_{12}+R_{31})}{R_{23}+R_{12}+R_{31}} \\ R_{31}^{eq} = \dfrac{R_{31}(R_{23}+R_{12})}{R_{31}+R_{23}+R_{12}} \end{cases}$$

Trasformazione stella/triangolo

Eguagliando le precedenti espressioni e semplificando si ottiene:

$$\begin{cases} R_1 = \dfrac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_2 = \dfrac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_3 = \dfrac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{12} = \dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_3} \\ R_{23} = \dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_1} \\ R_{31} = \dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_2} \end{cases}$$

Si osserva che questa trasformazione non comporta di per sè una semplificazione topologica, entrambe le sottoreti hanno infatti 3 lati, con l'aggiunta di un nodo nel collegamento a stella. L'utilizzo dell'una o l'altra dipende dal circuito esterno, in funzione di eventuali semplificazioni, ad esempio tipo serie o parallelo (*vedi esempio lavagna*).

Trasformazione stella/triangolo

In termini di conduttanze le precedenti relazioni divengono:

$$\begin{cases} G_1 = \dfrac{G_{12}G_{23} + G_{23}G_{31} + G_{31}G_{12}}{G_{23}} \\[2ex] G_2 = \dfrac{G_{12}G_{23} + G_{23}G_{31} + G_{31}G_{12}}{G_{31}} \\[2ex] G_3 = \dfrac{G_{12}G_{23} + G_{23}G_{31} + G_{31}G_{12}}{G_{12}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} G_{12} = \dfrac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \\[2ex] G_{23} = \dfrac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \\[2ex] G_{31} = \dfrac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3} \end{cases}$$

Nota: se le 3 resistenze (o conduttanze) sono uguali si ha:

$$\boxed{R_\Delta = 3\ R_Y}, \quad G_Y = 3\ G_\Delta$$

Semplificazioni topologiche

Sulla base del teorema di sostituzione è quindi possibile operare delle semplificazioni topologiche che consentono di ridurre il numero dei lati e/o dei nodi della rete, portando ad una riduzione delle equazioni e delle incognite del sistema risolvente (ad es. analisi di tableau).
In particolare, per componenti in serie (resistori o gen. di tensione) è possibile ridurre lati e nodi, per componenti in parallelo (resistori o gen. di corrente) si riducono i lati (nota: osservazione su $R//v_o$ ed R--i_o).
Anche nel caso di connessione serie di resistori con gen. di tensione o connessione parallelo di resistori con gen. di corrente è possibile introdurre una semplificazione topologica e considerare un bipolo unico con una relazione costitutiva del tipo ($a\,v + b\,i + c = 0$):

$$v = R\,i + v_o \quad \Rightarrow \quad v - R\,i - v_o = 0$$

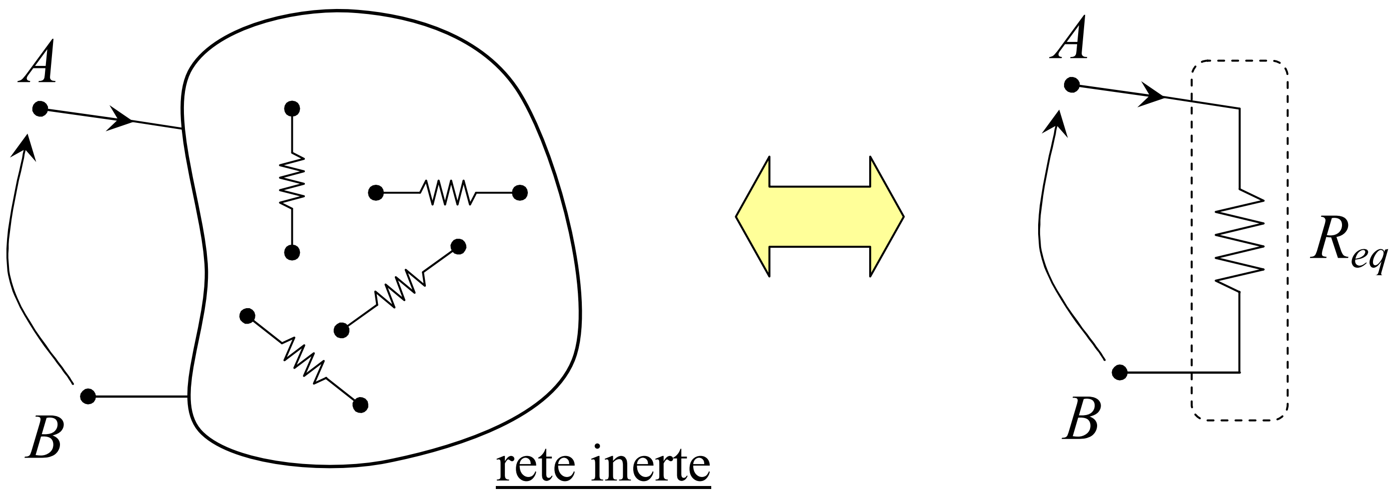
$$i = G\,v + i_o \quad \Rightarrow \quad -G\,v + i - i_o = 0$$

vedi esempi lavagna

Resistore equivalente

Un'ulteriore applicazione del principio di sostituzione consente di sostituire ad una <u>sottorete di soli resistori</u> riconducibile ad una coppia di morsetti (*A* e *B*)(e quindi un bipolo), un unico resistore equivalente la cui resistenza può essere calcolata sulla base delle trasformazioni serie, parallelo e stella/triangolo.

Un bipolo rappresentabile con un resistore equivalente è detto <u>inerte</u>.

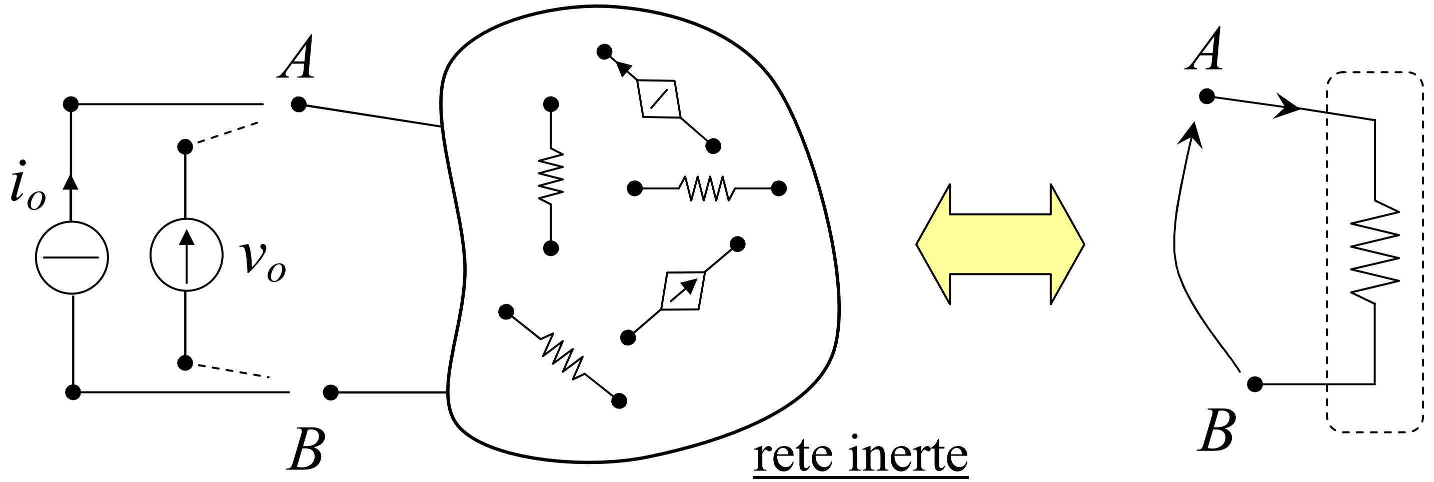


<u>nota</u>: $R_{eq} \geq 0$

Resistore equivalente - gen. pilotati

Nel caso la sottorete comprenda anche <u>generatori pilotati</u> da tensioni e/o correnti della sottorete stessa (*pilotati internamente*), in virtù della linearità v-i è comunque possibile pervenire ad una resistenza equivalente.
E' ora necessario esprimere il legame v-i ai morsetti A, B. Per far questo è possibile introdurre un generatore indipendente di corrente, i_o (o tensione, v_o) tra i morsetti A e B e valutare la corrispondente tensione v_{AB} (o corrente, i_{AB}) erogata, esprimendo la resistenza equivalente R_{eq} come rapporto tra tali grandezze:

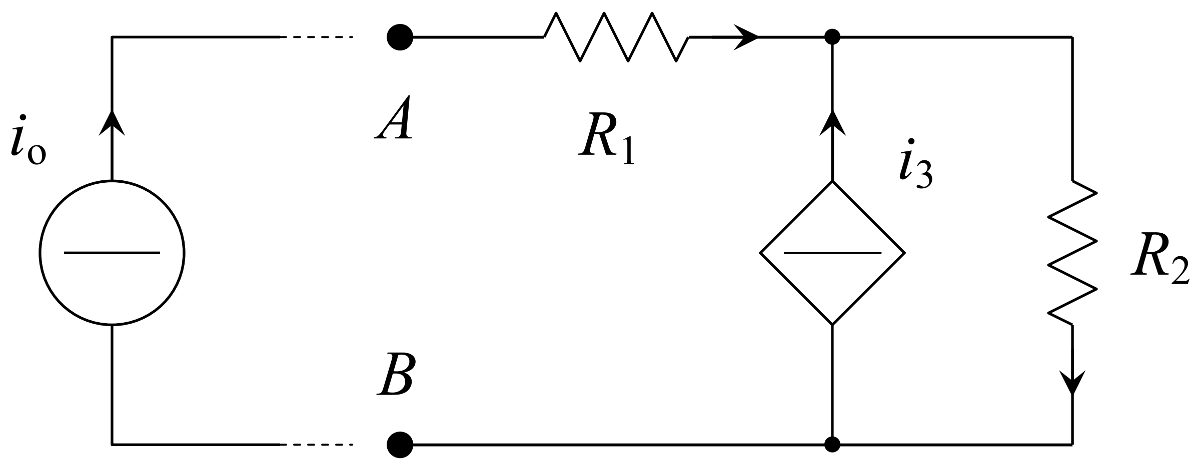
<u>nota</u>: $\exists\ R_{eq} < 0$



$$\begin{cases} R_{eq} = \dfrac{v_{AB}}{i_o} \\ R_{eq} = \dfrac{v_o}{i_{AB}} \end{cases}$$

Resistore equivalente: esempio 1

$$\begin{cases} i_1 = i_2 - i_3 \\ i_1 = i_o \\ v_{AB} = v_1 + v_2 \\ v_3 = -v_2 \end{cases}$$



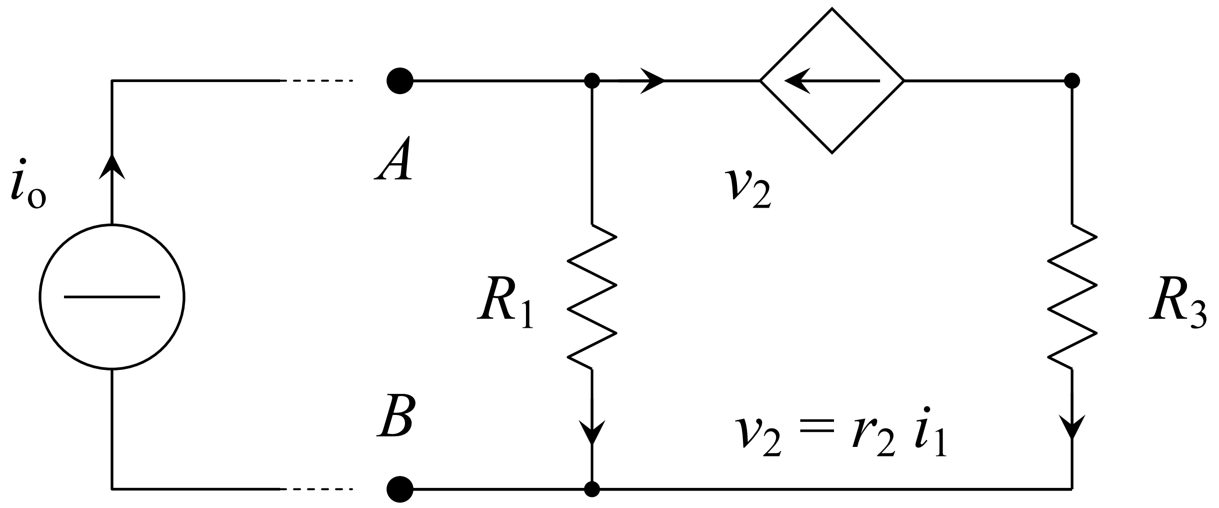
$$i_3 = \beta_3\, i_2$$

$$\begin{cases} v_1 = R_1\, i_1 \\ v_2 = R_2\, i_2 \\ i_3 = \beta_3\, i_2 \\ i_o = \textit{assegnata} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{AB} = R_1\, i_o + v_2 \\ i_o = v_2 / R_2 - \beta_3\, v_2 / R_2 \end{cases}$$

$$v_{AB} = [R_1 + R_2 / (1 - \beta_3)]\, i_o \quad \rightarrow \quad R_{eq} = \ \ldots$$

Resistore equivalente: esempio 2



Principio di sovrapposizione degli effetti

Ha validità generale per tutti i **sistemi lineari**. Afferma che gli ***effetti*** dovuti alla contemporanea applicazione di più ***cause*** possono essere ottenuti come somma degli effetti parziali ottenuti con l'applicazione delle singole cause.

Nel caso dei circuiti elettrici le cause sono i generatori indipendenti, gli effetti sono le tensioni e le correnti di lato, od una loro combinazione lineare.

Un'immediata conseguenza del principio di sovrapposizione è che gli effetti possono essere espressi come combinazione lineare delle singole cause.

Quindi, nel caso elettrico:

$$\begin{array}{cccccc} & & & m & & \\ 2l & \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \quad \mathrm{S} \quad \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} v_o \\ i_o \end{bmatrix} & m \end{array}$$

Principio di sovrapposizione degli effetti

Dimostrazione

Invertendo la matrice di tableau precedentemente definita si ottiene:

$$\begin{array}{c c} & 2l \\ 2l & \begin{bmatrix} \quad T \quad \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_o \\ i_o \end{bmatrix} \begin{array}{l} 2l-m \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} m \end{array} \quad \Rightarrow \quad 2l \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \begin{array}{c} 2l \\ \begin{bmatrix} \quad T^{-1} \quad \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ v_o \\ i_o \end{bmatrix} \begin{array}{l} 2l-m \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} m \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c c} & \\ 2l & \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} m \\ \begin{bmatrix} \quad S \quad \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} v_o \\ i_o \end{bmatrix} \; m}$$

avendo posto:

$$\begin{array}{c c} & m \\ 2l & \begin{bmatrix} \quad S \quad \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} 2l-m & m \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} \quad T^{-1} \quad \end{bmatrix}} \end{array} \begin{array}{c} m \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{I} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 2l-m \\ m \end{array}$$

La matrice $[S]$ è una sottomatrice rettangolare $2l$ x m della matrice tableau inversa $[T]^{-1}$ ottenuta considerandone le ultime m colonne.

Principio di sovrapposizione degli effetti

Un rete elettrica con più generatori indipendenti può quindi essere risolta considerando un generatore (o un gruppo di generatori) alla volta, disattivando (annullando) tutti i generatori restanti:

- disattivare un generatore di tensione significa porre la tensione a zero, ovvero considerarlo come un corto-circuito (unire i due nodi).
- disattivare un generatore di corrente significa porre la corrente a zero, ovvero considerarlo come un circuito aperto (eliminare il lato).

Il risultato finale si ottiene sommando il corrispondente contributo dei singoli generatori. I coefficienti s_{kh} della matrice [S] rappresentano esattamente tale contributo.
Ad esempio, la tensione sul lato k dovuta al solo h-esimo generatore di corrente vale: $v_k^h = s_{kh}\, i_{oh}$.