

# TRASFORMATORI

## 1. PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO

Il trasformatore è costituito da un anello (nucleo) di materiale ferromagnetico (tipicamente lamine sottili di acciaio al silicio) su cui sono avvolti due avvolgimenti in materiale conduttore (tipicamente rame): il “primario”, costituito da  $n_1$  spire ed il “secondario” costituito da  $n_2$  spire. Si tratta quindi di un doppio bipolo. Se il primario è alimentato da un generatore di tensione  $v_1$  (“tensione primaria”), in modo tale che il primario sia percorso da una corrente  $i_1$  (“corrente primaria”), nell’anello si stabilirà un campo magnetico (legge di Ampère). Dato che il nucleo è ferromagnetico si ha quindi in esso un campo di induzione magnetica (a cui corrisponde il flusso “principale”  $\phi$  indicato in figura 1)<sup>(#)</sup>. Si noti che le linee del campo di induzione si concatenano anche con l’avvolgimento secondario; quindi, se  $\phi$  varia nel tempo, per la legge di Faraday sarà indotta ai terminali del secondario una tensione  $v_2$  (“tensione secondaria”). Se il secondario è connesso ad un carico (ad esempio un resistore), circolerà su di esso la corrente  $i_2$  (“corrente secondaria”) che contribuirà anch’essa al flusso principale. Per la legge di Faraday si induce quindi una tensione anche sull’avvolgimento primario. Mediante il trasformatore è quindi possibile trasferire potenza elettrica dall’avvolgimento primario a quello secondario (o viceversa), senza fare ricorso ad alcun collegamento elettrico tra i due avvolgimenti; il trasferimento di potenza avviene attraverso il flusso principale che è presente nel nucleo del trasformatore e si concatena a entrambi gli avvolgimenti (sono pertanto flussi dispersi quelli che si concatenano ad un solo avvolgimento).

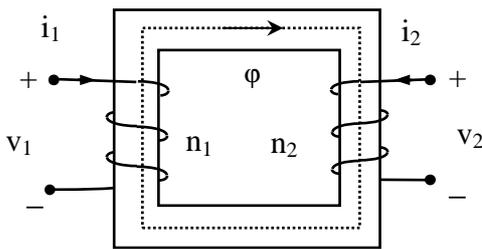


Figura 1 - Schema di un trasformatore monofase.

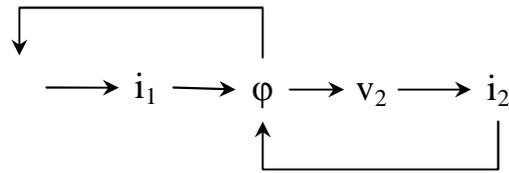


Figura 2. - Principio di funzionamento del trasformatore.

## 2. IL TRASFORMATORE IDEALE

Se si suppone che

- 1) non vi siano perdite negli avvolgimenti (dette “perdite nel rame”),
- 2) non si siano perdite nel nucleo ferromagnetico (dette “perdite nel ferro”),
- 3) tutte le linee del campo di induzione magnetica si concatenino ad entrambi gli avvolgimenti (equivalente ad assumere che non vi siano flussi dispersi) e che il materiale ferromagnetico abbia “permeabilità magnetica infinita”,

è possibile dedurre il modello del “trasformatore ideale” come segue. Dalla legge di Faraday possiamo determinare le tensioni ai capi degli avvolgimenti primario e secondario come derivate temporali dei flussi concatenati agli avvolgimenti stessi ( $v_1 = d\phi_{c1}/dt$ ,  $v_2 = d\phi_{c2}/dt$ )<sup>(\*)</sup>. Inoltre, grazie all’ipotesi 3) i flussi concatenati sono ottenibili semplicemente moltiplicando i numeri di spire per il flusso principale ( $\phi_{c1} = n_1 \phi$ ,  $\phi_{c2} = n_2 \phi$ ). Si ottengono quindi le relazioni  $v_1 = n_1 d\phi/dt$ ,  $v_2 = n_2$

<sup>(#)</sup> Si dice flusso principale il flusso del campo di induzione magnetica attraverso una sezione normale alla linea d’asse del nucleo di materiale ferromagnetico.

<sup>(\*)</sup> Il termine resistivo è trascurato grazie all’ipotesi 1). “Perdite nel rame nulle” significa infatti che la potenza dissipata per conduzione nel materiale degli avvolgimenti è assente, ovvero che la resistenza degli avvolgimenti è nulla.

$d\phi/dt$ , da cui, effettuando il rapporto membro a membro, otteniamo la relazione tra le tensioni a primario e secondario (purché  $d\phi/dt \neq 0$ ):

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (1)$$

L'equazione di accoppiamento magnetico tra primario e secondario si ottiene mediante la legge della circuitazione magnetica (o di Ampère) applicata alla linea d'asse dell'anello di materiale ferromagnetico. Grazie all'ipotesi 3) il campo magnetico nel materiale è trascurabile. Pertanto; con riferimento ai versi positivi indicati nella figura 1 si ottiene che la somma delle correnti concatenate alla linea è nulla<sup>(o)</sup>:

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = 0$$

Si ottiene quindi<sup>(oo)</sup> la relazione tra le correnti a primario e secondario:

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1} \quad (2)$$

Se si definisce il rapporto di trasformazione  $K = n_1/n_2$ , il trasformatore ideale, il cui simbolo è indicato nella figura 3, risulta definito dalle seguenti caratteristiche:

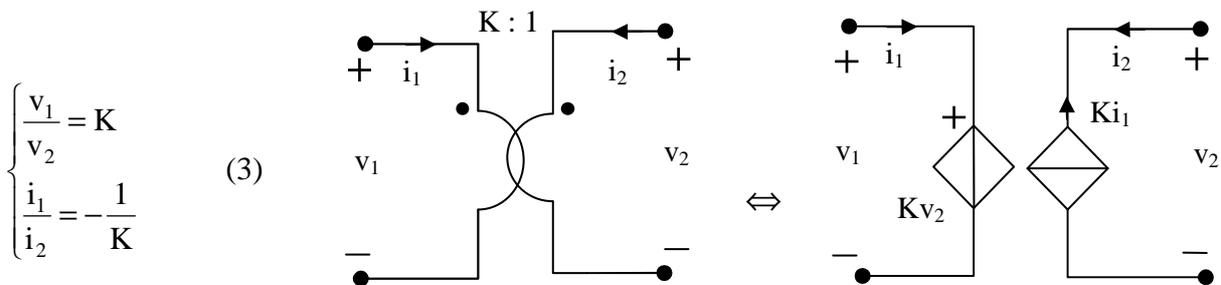


Figura 3. - Trasformatore ideale e circuito equivalente.

Si noti che in figura 3 una coppia di terminali è segnata con un punto, indicando quindi i versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti per cui le equazioni costitutive (3) sono corrette. In figura 3 è mostrato inoltre uno dei possibili circuiti equivalenti del trasformatore ideale. Si noti anche che, poiché il trasformatore ideale è un componente ideale definito dalle (3), le relazioni tra tensioni e correnti a primario e secondario sono valide per tutte le forme d'onda e per tutte le frequenze (inclusa la continua).

Il trasformatore ideale gode delle due seguenti proprietà fondamentali:

1. Il trasformatore ideale non dissipa né accumula energia. Dalle (3) risulta evidente che la potenza assorbita dal trasformatore ideale è nulla; infatti, con riferimento ai versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti definiti in figura 3, si ha

<sup>(o)</sup> Se la permeabilità del materiale ferromagnetico costituente il nucleo fosse finita e costante, si otterrebbe la relazione più generale “la somma delle correnti concatenate alla linea è proporzionale al flusso principale”:

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = \mathcal{R} \phi$$

dove  $\mathcal{R}$ , detta “riluttanza del circuito magnetico”, dipende esclusivamente dalla permeabilità del materiale e dalla geometria del nucleo (sezione e lunghezza). Tale relazione prende il nome di “Legge di Hopkinson”.

<sup>(oo)</sup> Si noti che per definire tale relazione si è utilizzata l'ipotesi 2). Infatti per calcolare la corrente concatenata presente nella legge di Ampère sarebbe necessario tenere conto anche delle correnti circolanti nel nucleo (il materiale ferromagnetico è generalmente conduttore). Tuttavia, “perdite nel ferro nulle” implica che la potenza dissipata per conduzione nel materiale del nucleo è assente, ovvero che non ci sono correnti nel nucleo (la conducibilità del materiale ferromagnetico è zero).

$$p(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = (Kv_2(t))\left(-\frac{i_2(t)}{K}\right) + v_2(t)i_2(t) = -v_2(t)i_2(t) + v_2(t)i_2(t) = 0$$

Quindi la somma delle potenze assorbite a primario e secondario è complessivamente nulla, ovvero la potenza assorbita a primario dal trasformatore ideale ( $p_1 = v_1 i_1$ ) risulta in ogni istante uguale a quella erogata al secondario ( $p_2 = -v_2 i_2$ ). In particolare, con riferimento al regime sinusoidale di frequenza  $f$  dalle (3) risulta  $\underline{V}_1 = K\underline{V}_2$ ,  $\underline{I}_2 = -K\underline{I}_1$  e quindi la potenza complessa assorbita a primario dal trasformatore ideale  $\underline{N}_1 = \underline{V}_1(\underline{I}_1)^*$  risulta uguale a quella erogata al secondario  $\underline{N}_2 = -\underline{V}_2(\underline{I}_2)^*$ . Il trasformatore ideale cioè non assorbe né potenza attiva né potenza reattiva; risultano però mutati i parametri (tensione e corrente) con cui la energia elettrica viene assorbita a primario ed erogata a secondario: la tensione viene ridotta (od aumentata) di un fattore pari al rapporto di trasformazione del trasformatore  $K$  mentre la corrente viene aumentata (o diminuita) dello stesso fattore.

2. Quando a secondario di un trasformatore ideale è collegato un resistore di resistenza  $R$ , il primario si comporta come un resistore di resistenza equivalente  $K^2R$ . Tale equivalenza è illustrata nella figura 4 e prende il nome di “riduzione da secondario a primario”. La dimostrazione è immediata:

$$v_1(t) = K v_2(t) = K [-R i_2(t)] = -KR [-K i_1(t)] = K^2 R i_1(t)$$

Analogamente, con riferimento al regime sinusoidale di frequenza  $f$  dalle (3) risulta anche che quando a secondario di un trasformatore ideale è collegato una impedenza  $\underline{Z}$ , il primario si comporta come una impedenza di valore  $K^2\underline{Z}$ .

$$\underline{V}_1(t) = K \underline{V}_2(t) = K [-\underline{Z} \underline{I}_2(t)] = -K\underline{Z} [-K \underline{I}_1(t)] = K^2 \underline{Z} \underline{I}_1(t)$$

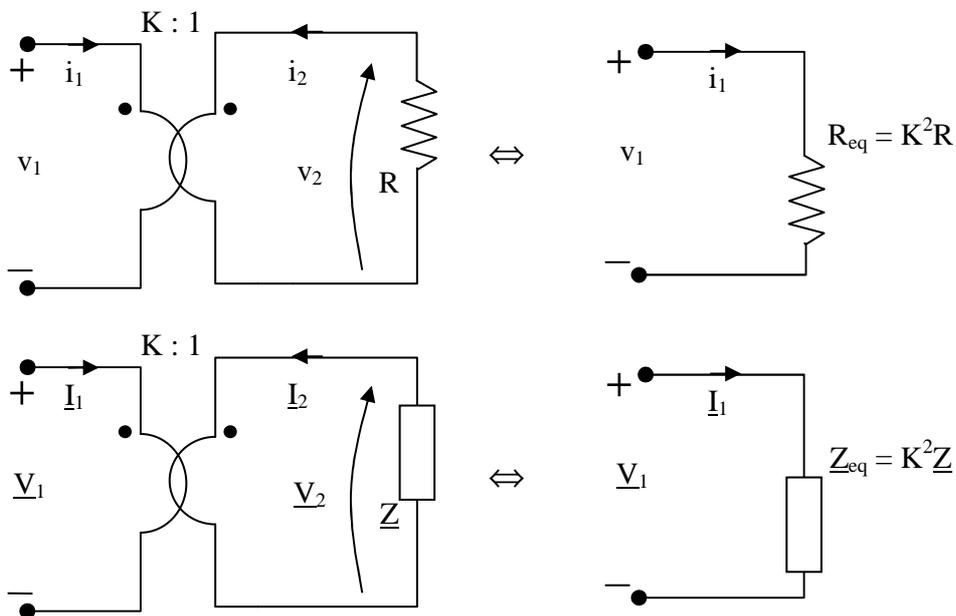


Figura 4 - Riduzione da secondario a primario.

### 3. INDUTTORI ACCOPPIATI LINEARI

Se si suppone che

- 1) non vi siano perdite negli avvolgimenti (dette “perdite nel rame”),
- 2) non si siano perdite nel nucleo ferromagnetico (dette “perdite nel ferro”),
- 3) il materiale ferromagnetico abbia permeabilità magnetica costante (materiale lineare),

è possibile dedurre il modello degli “induttori accoppiati lineari” come segue. Analogamente a quanto visto per il trasformatore ideale, dalla legge di Faraday possiamo determinare le tensioni ai capi degli avvolgimenti primario e secondario come derivate temporali dei flussi concatenati agli avvolgimenti stessi ( $v_1 = d\phi_{c1}/dt$ ,  $v_2 = d\phi_{c2}/dt$ ).

Inoltre, grazie alla linearità del materiale, i flussi concatenati sono ottenibili semplicemente come combinazioni lineari delle correnti a primario e secondario (sorgenti del campo magnetico):

$$\begin{cases} \phi_{c1} = L_1 i_1 + M i_2 \\ \phi_{c2} = M i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$

dove  $L_1$  ed  $L_2$  (misurati in H [Henry]) sono, rispettivamente i **coefficienti di auto induzione** del primario e del secondario ed  $M$  (misurata in H) è il **coefficiente di mutua induzione** tra i due avvolgimenti (non si sono definiti due coefficienti di mutua induzione distinti in quanto, dalla fisica, la loro uguaglianza è imposta da considerazioni energetiche fondamentali). Si intende sottolineare che i coefficienti di auto e mutua induzione dipendono esclusivamente dalla geometria e dalle caratteristiche magnetiche del materiale del nucleo.

Il doppio bipolo lineare “induttori accoppiati” (illustrato in figura 4) risulta quindi descritto dalle seguenti relazioni tensione-corrente:

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad (4)$$

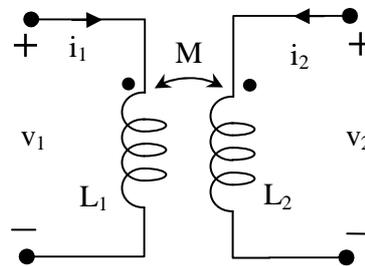


Figura 5 - Induttori accoppiati.

Si noti che in figura 5 una coppia di terminali è segnata con un punto, indicando quindi i versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti per cui le equazioni costitutive (4) sono corrette. Si noti inoltre che, poiché gli induttori accoppiati sono un componente ideale definito dalle (4), le relazioni tra tensioni e correnti a primario e secondario sono valide per tutte le forme d’onda e per tutte le frequenze (inclusa la continua).

Con riferimento al regime sinusoidale di frequenza  $f$  le (4) possono essere scritte in termini di numeri complessi rappresentativi delle tensioni e delle correnti, come segue:

$$\begin{cases} \underline{V}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \\ \underline{V}_2 = j\omega M \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2 \end{cases}$$

Il doppio bipolo “induttori accoppiati” gode delle due seguenti proprietà fondamentali:

1. Il doppio bipolo “induttori accoppiati” è un componente con memoria in grado di immagazzinare energia magnetica. Dalle (4) risulta infatti che la potenza assorbita dagli induttori accoppiati, con riferimento ai versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti definiti in figura 4, è data da:

$$\begin{aligned} p(t) &= v_1 i_1 + v_2 i_2 = L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) + \frac{d}{dt} (M i_1 i_2) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) = \frac{d}{dt} W_m \end{aligned}$$

Tale relazione mostra come tutta la potenza elettrica assorbita dagli induttori accoppiati vada ad incrementare il termine  $W_m = L_1 i_1^2 / 2 + M i_1 i_2 + L_2 i_2^2 / 2$  che assume quindi il significato di energia magnetica accumulata negli induttori accoppiati (si noti che il primo ed il terzo termine coincidono con le energie magnetiche accumulate dagli induttori  $L_1$  ed  $L_2$  se fossero non accoppiati; il termine  $M i_1 i_2$ , che prende invece il nome di energia mutua, è quello che rende possibile trasferire potenza

elettrica dall'avvolgimento primario a quello secondario, senza fare ricorso ad alcun collegamento elettrico tra i due avvolgimenti); tale energia, una volta immagazzinata, può essere interamente restituita ai componenti del circuito cui sono collegati gli induttori accoppiati durante un transitorio successivo. La potenza elettrica assorbita dagli induttori accoppiati può quindi assumere valori sia positivi che negativi.

Esiste una relazione notevole che lega i coefficienti di auto e mutua induzione:  $|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$ . Questa relazione è una conseguenza diretta del fatto che l'energia magnetica è sempre positiva. Infatti, con semplici passaggi si ottiene (ricordando che l'autoinduttanza è sempre positiva):

$$0 \leq W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 = \frac{1}{2 L_2} \left[ (L_2 i_2 + M i_1)^2 + i_1^2 (L_1 L_2 - M^2) \right]$$

Quindi, dato che il primo termine della somma si può annullare per una opportuna scelta dei valori delle correnti, il secondo termine deve essere sempre positivo o nullo.

La mutua induttanza  $M$  è spesso espressa in funzione del coefficiente di accoppiamento  $k$  definito da:  $k = M/\sqrt{L_1 L_2}$ . La relazione appena provata mostra quindi che  $|k| \leq 1$ , ovvero è impossibile ottenere un coefficiente di accoppiamento maggiore di uno. Quando  $k = 0$ , si ha  $M = 0$ , cioè non esiste accoppiamento magnetico fra gli induttori. Quando  $k = 1$ , si ha  $|M| = \sqrt{L_1 L_2}$ , cioè l'accoppiamento magnetico fra gli induttori è perfetto.

2. Il doppio bipolo "induttori accoppiati" è equivalente ad un doppio bipolo costituito da un trasformatore ideale e da tre induttori (disaccoppiati)  $L_0, L_{d1}$  ed  $L_{d2}$ . Per dimostrare tale equivalenza, illustrata in figura 6, è sufficiente verificare che relazioni tensione-corrente sono le stesse. Si ha infatti:

- Applicando la LKT a primario:  $v_1 = L_{d1} \frac{di_1}{dt} + L_0 \frac{d}{dt}(i_1 - i'_1)$
- Dalle caratteristiche (3) del Trasformatore ideale: 
$$\begin{cases} L_0 \frac{d}{dt}(i_1 - i'_1) = K \left( v_2 - L_{d2} \frac{di_2}{dt} \right) \\ i'_1 = -\frac{1}{K} i_2 \end{cases}$$

Sostituendo l'ultima relazione nelle precedenti si ottiene quindi: 
$$\begin{cases} v_1 = (L_0 + L_{d1}) \frac{di_1}{dt} + \frac{L_0}{K} \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = \frac{L_0}{K} \frac{di_1}{dt} + \left( \frac{L_0}{K^2} + L_{d2} \right) \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

Tali relazioni coincidono con le caratteristiche (4) degli induttori accoppiati se  $L_1 = L_0 + L_{d1}$ ,  $L_2 = L_{d2} + L_0/K^2$  ed  $M = L_0/K$ .

L'interpretazione fisica di tale equivalenza, è la seguente:  $L_{d1}$  ed  $L_{d2}$  sono le *induttanze di dispersione*, cioè le induttanze viste a primario ed a secondario dovute ai flussi dispersi, ovvero alle linee di campo magnetico che non si concatenano ad entrambi gli avvolgimenti. Infatti, per  $k \rightarrow 1$ , si ha  $M^2 \rightarrow L_1 L_2$ , e quindi  $L_{d1}, L_{d2} \rightarrow 0$ .  $L_0$  è detta *induttanza magnetizzante*: essa tiene conto del flusso principale, comune ad entrambi gli avvolgimenti.

Si supponga di voler costruire un trasformatore di alta qualità. Si sceglie un anello di materiale magnetico con una elevatissima permeabilità magnetica  $\mu$ , quindi si avvolgono strettamente sull'anello le due bobine. Si supponga di utilizzare materiali a permeabilità  $\mu$  crescente; allora, al crescere di  $\mu$  si otterrebbero due effetti: i flussi dispersi diventerebbero sempre minori (per cui  $L_{d1}$  ed  $L_{d2}$  si ridurrebbero) e il flusso principale crescerebbe (per cui  $L_0$  aumenterebbe). Pertanto, nel caso limite in cui  $\mu \rightarrow \infty$ , si avrebbe  $L_{d1}, L_{d2} \rightarrow 0$  ed  $L_0 \rightarrow \infty$ . Con riferimento alla figura 6 è possibile vedere che si otterrebbe dunque il trasformatore ideale.

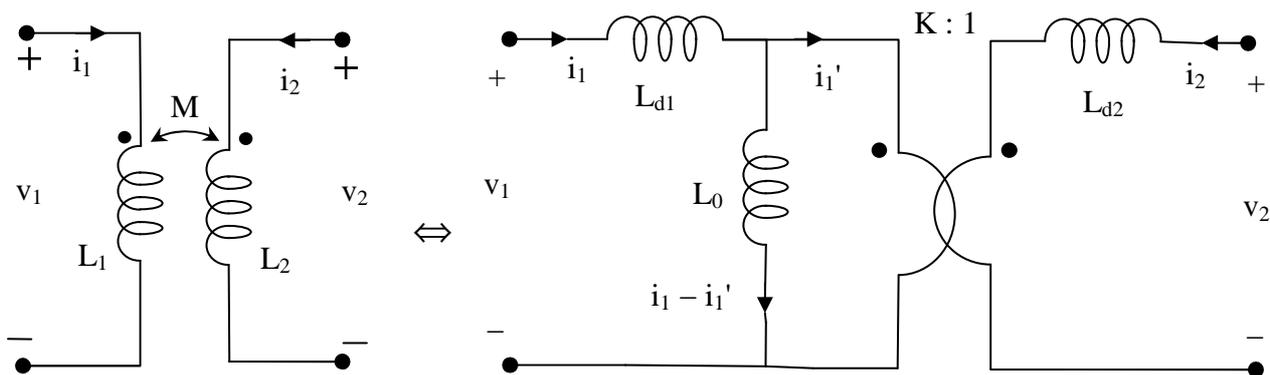


Figura 6

#### 4. IL TRASFORMATORE REALE

Le perdite nel trasformatore reale possono classificarsi come segue:

- Le perdite per conduzione negli avvolgimenti, dette *perdite nel rame* ( $P_{cu}$ ), sono perdite ohmiche e pertanto risultano dipendere dal quadrato della corrente che scorre nei conduttori stessi. I conduttori devono essere di bassa resistenza elettrica per ridurre le perdite e le cadute di tensione presentate dagli avvolgimenti. Il materiale più usato per i conduttori è il rame elettrolitico ricotto per le sue buone qualità meccaniche ed elettriche.
- Le *perdite nel ferro* ( $P_{fe}$ ) per isteresi e per correnti parassite nel nucleo ferromagnetico. Infatti, poiché il nucleo è percorso da un flusso variabile ed il materiale ferromagnetico è tipicamente conduttore, anche nel nucleo si generano forze elettromotrici indotte, che danno luogo a delle correnti, dette parassite (o di Foucault). Per ridurre le correnti parassite si costruisce il nucleo con lamierini, infatti il lamierino spezza il percorso delle correnti parassite e le riduce. Le perdite per isteresi sono causate da fenomeni di “attrito” nella struttura cristallina del materiale ferromagnetico sottoposto ad un campo di induzione variabile. Per loro natura le perdite nel ferro dipendono quindi dal campo di induzione e dalla sua variazione temporale all’interno del nucleo magnetico, e quindi fondamentalmente dalla tensione a primario o a secondario.

Si consideri il circuito elettrico rappresentato nella figura 7. Esso costituisce il circuito equivalente del trasformatore (alle basse frequenze), infatti, per passare dal circuito equivalente degli induttori accoppiati al circuito di figura 7 si è:

1. considerata una *induttanza di dispersione a primario* ( $L_{d1}$ ) e *a secondario* ( $L_{d2}$ ) dovuta ai flussi di dispersione a primario e a secondario, ovvero alle linee di campo magnetico che si concatenano al primo avvolgimento ma non al secondo, e viceversa;
2. inserita la resistenza degli avvolgimenti di primario ( $R_1$ ) e di secondario ( $R_2$ ), per tener conto delle *perdite nel rame* ( $P_{cu} = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$ );
3. inserita una resistenza ( $R_0$ ) in parallelo all’induttanza magnetizzante, per tener conto delle *perdite nel ferro* ( $P_{fe} = R_0 i_a^2$ ).

Il trasformatore “reale”, come quello ideale, è in grado di modificare i valori di tensione e corrente a secondario e a primario, ma, a differenza del trasformatore ideale, assorbe potenza sia attiva che reattiva. La potenza attiva viene dissipata (trasformata in calore) in parte negli avvolgimenti (per effetto Joule) ed in parte nel nucleo ferromagnetico (per effetto Joule e per isteresi). La potenza reattiva assorbita mantiene i flussi dispersi ed il flusso principale. La presenza di flussi dispersi introduce uno sfasamento tra la tensione primaria e la tensione secondaria, mentre l’induttanza magnetizzante finita comporta l’assorbimento a primario, anche nel funzionamento a vuoto (cioè col secondario aperto), di una corrente magnetizzante ( $I_\mu$ ).

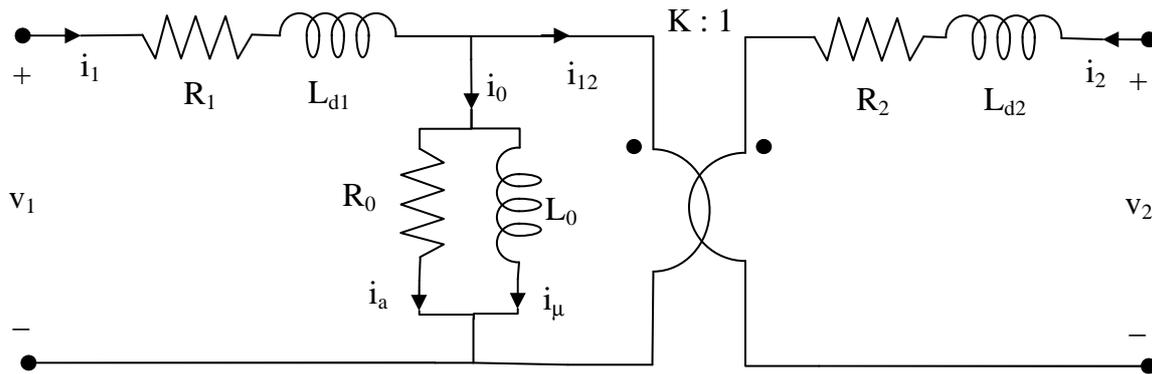


Figura 7. - Circuito equivalente del trasformatore reale.

Con riferimento al regime sinusoidale di frequenza  $f$  il circuito elettrico rappresentato nella figura 7 può essere descritto in termini di fasori di tensioni e correnti, come illustrato nella figura 8.a. Si sono introdotte le reattanze di dispersione degli avvolgimenti ( $X_{d1} = \omega L_{d1}$ ,  $X_{d2} = \omega L_{d2}$ ) e la reattanza magnetizzante del nucleo ( $X_0 = \omega L_0$ ). In figura 8.b si è illustrato lo stesso circuito di figura 8.a in cui si sono evidenziate l'impedenza primaria  $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{d1}$ , l'impedenza secondaria  $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{d2}$  e l'impedenza  $\underline{Z}_0 = (R_0) // (jX_0)$  ottenuta dal parallelo delle impedenze  $R_0$  e  $jX_0$ .

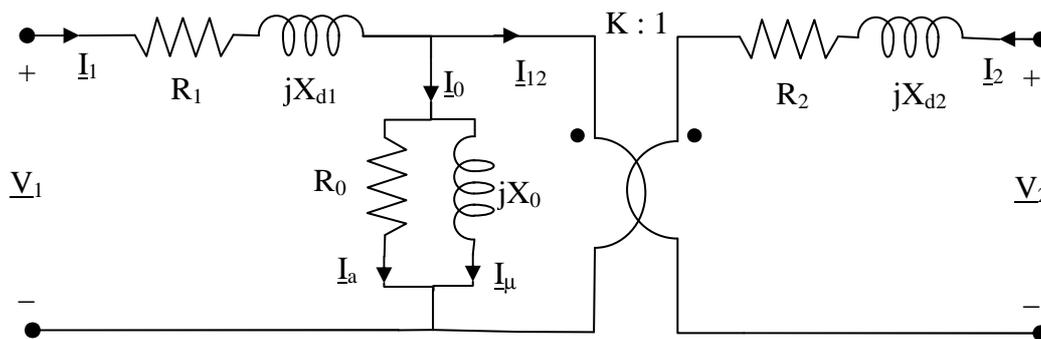


Figura 8.a - Circuito equivalente del trasformatore reale in regime sinusoidale.

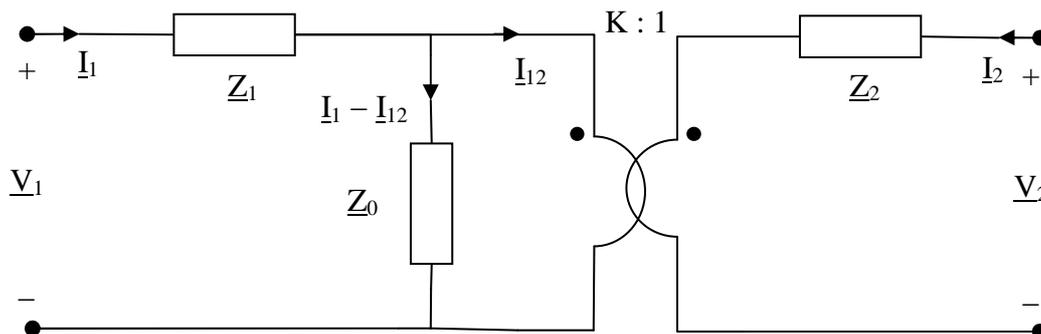


Figura 8.b - Circuito equivalente del trasformatore reale nel dominio simbolico.

È possibile spostare a sinistra del trasformatore ideale (verso il primario) l'impedenza secondaria  $\underline{Z}_2$  moltiplicandola per il quadrato del rapporto di trasformazione  $K$ ; si ottiene quindi il circuito equivalente del trasformatore ridotto a primario illustrato nella figura 9, in cui  $\underline{Z}_{12} = K^2 \underline{Z}_2$  (si ricordi che in tale schema anche l'impedenza di carico collegata al secondario va moltiplicata per il quadrato del rapporto di trasformazione  $K$ ). Analogamente è possibile considerare il circuito equivalente del trasformatore ridotto a secondario.

I trasformatori sono costruiti in modo da ridurre il più possibile gli effetti di perdita; risulta quindi comprensibile come, normalmente, la tensione sulla impedenza  $Z_1$  risulti molto piccola (meno di qualche per mille) rispetto a quella su  $Z_0$ . Di conseguenza è possibile approssimare notevolmente la rete equivalente del trasformatore, senza introdurre un errore rilevante, applicando la tensione di alimentazione direttamente ai terminali di  $Z_0$  come mostrato nella figura 10.

In questo caso la corrente  $I_0$  assorbita da  $Z_0$  non dipende dal carico del trasformatore e coincide con la corrente assorbita a primario dal trasformatore nel funzionamento a vuoto, quando cioè il secondario è aperto ( $I_2 = 0$ ). Nell'ambito di tale approssimazione non è più necessario distinguere l'impedenza primaria  $Z_1$  da quella secondaria  $Z_2$ . Si ha infatti un'unica impedenza totale che può essere riferita a primario:  $Z_{1t} = R_{1t} + jX_{1t} = Z_1 + Z_{12}$ . Analogamente è possibile considerare il circuito equivalente semplificato del trasformatore con un'unica impedenza totale riferita a secondario ( $Z_{2t}$ ).

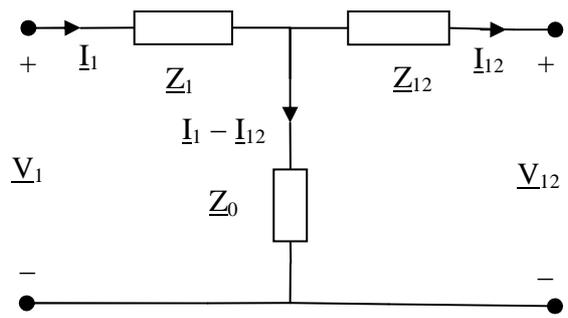


Figura 9. - circuito equivalente del trasformatore ridotto a primario.

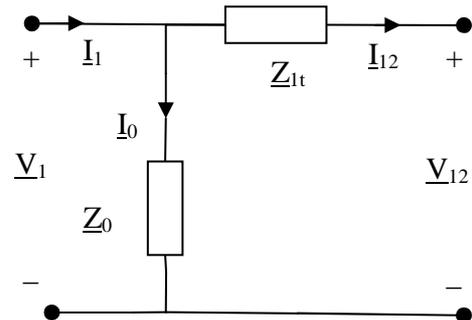


Figura 10. - circuito equivalente semplificato del trasformatore ridotto a primario.

### 5. PROVE A VUOTO ED IN CORTO CIRCUITO

La **prova a vuoto** viene eseguita alimentando il primario con la sua tensione nominale e mantenendo il secondario in circuito aperto. Facendo riferimento alla rete equivalente semplificata di figura 10 risulta nulla la corrente  $I_{12}$ , di conseguenza si ottiene:

dove  $V_{10}$  è la tensione (valore efficace) primaria,  $I_{10}$  è la corrente (valore efficace) primaria e  $P_0$  è la potenza attiva assorbita a primario.

$$R_0 = \frac{V_{10}^2}{P_0}$$

$$X_0 = \frac{V_{10}^2}{\sqrt{(V_{10} I_{10})^2 - P_0^2}}$$

La **prova in cortocircuito** viene effettuata alimentando il primario del trasformatore con il secondario in cortocircuito (chiuso su un amperometro a impedenza trascurabile).

La tensione primaria deve essere tale che la corrente a secondario (misurata dall'amperometro) sia pari al valore nominale (in valore efficace). Tale valore della tensione viene chiamato tensione di cortocircuito ( $V_{1c}$ ) e risulta essere pari ad un frazione (< 10 %) della tensione nominale primaria. Per i valori tipici dei parametri del trasformatore risulta  $|Z_0| \gg |Z_{1t}|$  e quindi, nel funzionamento in cortocircuito, è possibile considerare la rete equivalente semplificata del trasformatore mostrata in figura 11 (rete di Kapp).

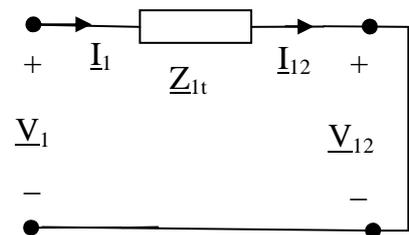


Figura 11. - Rete di Kapp

Con riferimento a tale semplificazione risulta quindi:

dove  $V_{1c}$  è la tensione (valore efficace) primaria,  $I_{1c}$  è la corrente (valore efficace) primaria e  $P_c$  è la potenza attiva assorbita a primario. Tali grandezze possono essere misurate mediante l'inserzione a primario di un voltmetro, un amperometro ed un wattmetro.

$$R_{1t} = \frac{P_c}{I_{1c}^2}$$

$$X_{1t} = \frac{\sqrt{(V_{1c} I_{1c})^2 - P_c^2}}{I_{1c}^2}$$

## 6. RENDIMENTO CONVENZIONALE DEL TRASFORMATORE

Il trasformatore assorbe potenza elettrica dal primario ed eroga potenza elettrica al secondario; tale trasformazione avviene in presenza di perdite (nel rame e nel ferro). Il rendimento del trasformatore ( $\eta$ ) viene quindi definito come il rapporto tra la potenza attiva erogata a secondario ( $P_{2e}$ ) e la potenza attiva assorbita a primario ( $P_{1a}$ ); indicando con  $P_d$  la potenza dissipata (trasformata in calore) all'interno del trasformatore risulta:

$$\eta = P_{2e}/P_{1a} = P_{2e}/(P_{2e} + P_d)$$

La determinazione sperimentale di tale grandezza è difficoltosa per varie ragioni. In primo luogo, sarebbe necessaria una prova in condizioni nominali (con costi crescenti al crescere della potenza richiesta). In secondo luogo, non essendo presenti parti rotanti nel trasformatore, il rendimento è molto elevato (può essere superiore al 99 %) e piccoli errori nella misura delle potenze assorbita ed erogata possono produrre un errore notevole sul rendimento. Per ovviare a tali inconvenienti viene definito un rendimento convenzionale del trasformatore ( $\eta_{conv}$ ). Le norme stabiliscono dettagliatamente le modalità del calcolo del rendimento convenzionale a seconda del carico che il trasformatore deve alimentare; facendo riferimento ad un carico con fattore di potenza  $\cos \varphi$  che assorbe la potenza nominale del trasformatore si ha:

$$\eta_{conv} = \frac{A_n \cos \varphi}{A_n \cos \varphi + P_{Cu} + P_{Fe}} \quad (5)$$

Nella (5)  $A_n$  è la potenza apparente nominale del trasformatore (che è nota),  $P_{Cu}$  sono le perdite nel rame, valutate mediante la prova in cortocircuito, e  $P_{Fe}$  sono le perdite nel ferro, valutate mediante la prova a vuoto. Nella prova in cortocircuito le perdite per effetto Joule negli avvolgimenti, sono largamente predominanti rispetto a quelle nel ferro e quindi la potenza attiva assorbita durante tale prova rappresenta la potenza che viene dissipata nel rame, a parità di correnti negli avvolgimenti, quindi  $P_{Cu} = P_c$ .<sup>(\*)</sup> Nella prova a vuoto risultano invece trascurabili le perdite negli avvolgimenti, visto che il secondario non è percorso da corrente ed il primario è percorso solo dalla corrente a vuoto (che è una frazione abbastanza piccola della corrente nominale). Quindi la potenza attiva assorbita durante la prova a vuoto rappresenta la potenza dissipata nel ferro durante il funzionamento nominale ( $P_{Fe} = P_0$ )

## 7. TRASFORMATORI TRIFASE

Per trasferire energia elettrica tra due reti trifase a differenti tensioni, si può ricorrere a tre trasformatori monofase opportunamente collegati tra loro. Nella figura 12 è mostrata una possibile disposizione dei tre trasformatori monofase. In questo caso, gli avvolgimenti primari sono collegati a stella, così come quelli secondari. I tre circuiti magnetici di figura 12 sono equivalenti ad un unico trasformatore ottenuto fondendo in un'unica colonna le tre colonne prive di avvolgimenti dei trasformatori monofase (figura 13). La colonna centrale del circuito magnetico raffigurato in figura 13 è percorsa da un flusso:

$$\Phi' = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

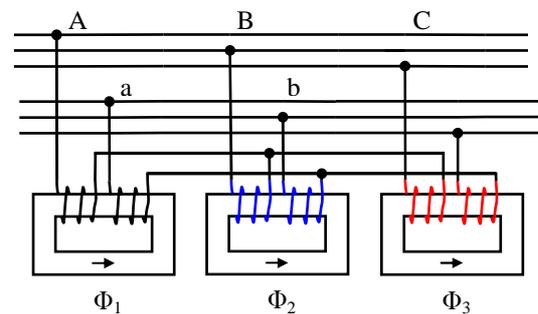


Figura 12. - Banco di tre trasformatori monofase (collegamento stella-stella).

<sup>(\*)</sup> In realtà è necessario tenere conto della variazione della resistenza degli avvolgimenti al variare della temperatura degli stessi e quindi le norme fissano le modalità del calcolo di  $P_{Cu}$  a partire dalla misura di  $P_c$ .

dove  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  e  $\Phi_3$  sono i flussi relativi a ciascun trasformatore. Se poi tali flussi costituiscono una terna simmetrica, la loro somma è nulla, e la colonna centrale può venire soppressa (figura 14).

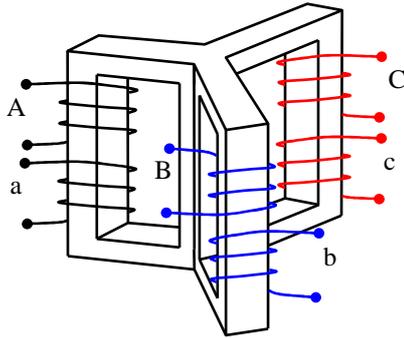


Figura 13. - Trasformatore trifase equivalente al banco di tre trasformatori monofase.

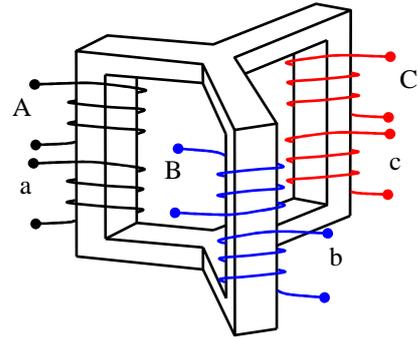


Figura 14. - Trasformatore trifase con nucleo simmetrico.

La configurazione illustrata nella figura 14 presenta delle difficoltà costruttive ed un ingombro tale che di solito si preferisce adottare un nucleo complanare (figura 15). Utilizzando tale disposizione si introduce nella terna dei flussi magnetici una dissimmetria che peraltro risulta di norma trascurabile.

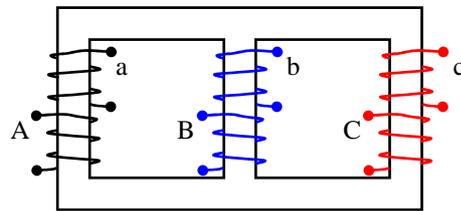
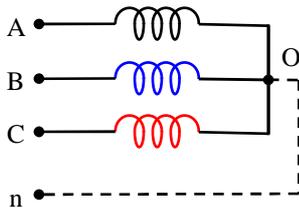
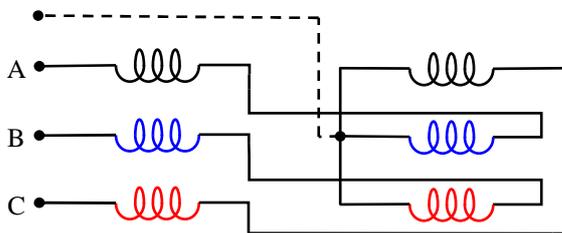


Figura 15. - Trasformatore trifase con nucleo complanare.

### Collegamenti delle fasi



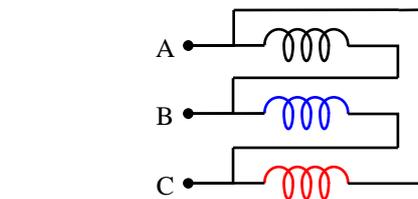
**collegamento a stella:** gli avvolgimenti hanno un morsetto in comune O (centro stella). Si rendono così disponibili due valori di tensione: la tensione concatenata, tra due terminali, e la tensione principale di fase tra uno dei terminali ed il centro stella.



### Rapporto di trasformazione

Il rapporto di trasformazione di un trasformatore trifase (K) viene definito come il rapporto tra il valore efficace delle tensioni concatenate corrispondenti alle coppie di morsetti omologhi primari e secondari, relativo al funzionamento a vuoto del trasformatore (trascurando quindi le cadute di tensione interne del trasformatore):

$$K = V_{AB}/V_{ab}$$



**collegamento a triangolo:** la fine di un avvolgimento è connesso con l'inizio del successivo. Il collegamento a triangolo rende disponibile un solo valore di tensione, quello della tensione concatenata.

**collegamento a zig-zag:** è usato solitamente per il collegamento delle fasi del secondario alle rete trifase con neutro (con le fasi di primario a stella). Gli avvolgimenti di ogni fase vengono divisi in due parti e collegate come mostrato in figura. Utilizzando tale collegamento si rendono disponibili due valori di tensione. Il vantaggio del collegamento a zig-zag con filo neutro è dovuto al fatto che eventuali squilibri del carico si risentono meno sul circuito primario.

Il rapporto di trasformazione, che nei trasformatori monofase è pari al rapporto  $n_1/n_2$ , dipende, nel caso di un trasformatore trifase, anche dai tipi di collegamenti delle fasi primarie e secondarie. Alcuni esempi sono riportati nella tabella 1.

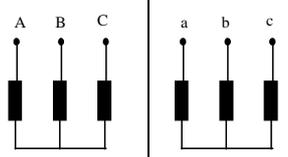
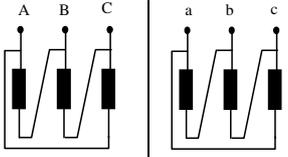
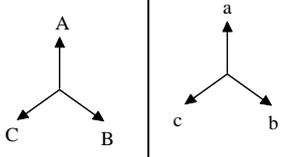
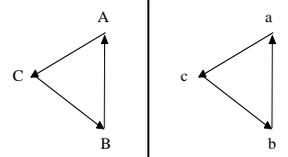
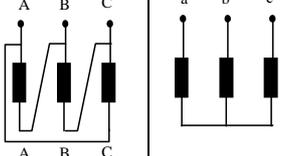
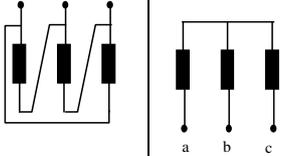
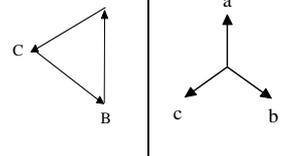
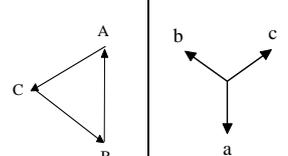
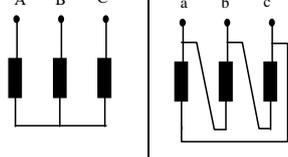
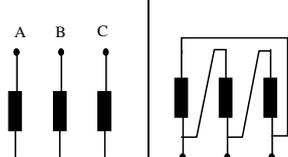
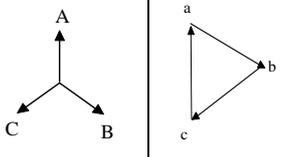
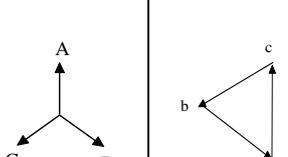
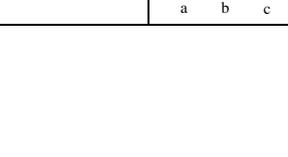
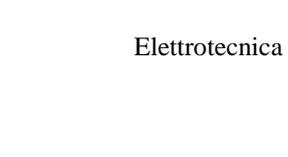
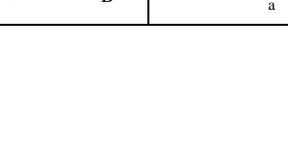
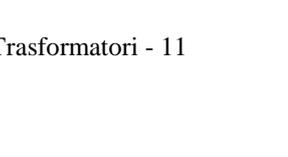
### Classificazione dei trasformatori

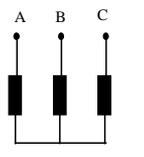
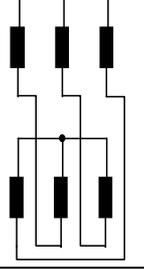
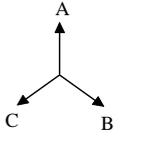
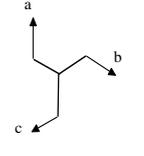
Seguendo le Norme CEI, la classificazione dei trasformatori trifase segue il seguente criterio:

- il collegamento a stella viene indicato con Y al primario e con y al secondario;
- il collegamento a triangolo viene indicato con D al primario e con d al secondario;
- il collegamento a zig-zag viene indicato con z al secondario;
- Lo sfasamento tra due tensioni principali di fase corrispondenti, trascurando gli effetti dissipativi, è sempre un multiplo di  $30^\circ$ ; dividendo tale sfasamento per  $30^\circ$  si individua il gruppo di appartenenza del trasformatore (un numero intero da 0 a 11).

Ad esempio, Dy5 denota un trasformatore trifase con primario a triangolo, secondario a stella e gruppo di appartenenza 5 (sfasamento  $150^\circ$  tra tensioni di fase di primario e di secondario).

Tabella 1. Alcuni collegamenti per trasformatori trifase

Collegamento		$\frac{V_{AB}}{V_{ab}}$ $\left(K = \frac{n_1}{n_2}\right)$	primario	secondario	primario	secondario	Spost. ang.	Gruppo	Denom. conv.
prim.	sec.								
stella	stella	K					$0^\circ$	0	Yy0
triang.	triang.	K					$0^\circ$	0	Dd0
triang.	stella	$\frac{K}{\sqrt{3}}$					$330^\circ$	11	Dy11
							$150^\circ$	5	Dy5
stella	triang.	$K\sqrt{3}$					$330^\circ$	11	Yd11
							$150^\circ$	5	Yd5

stella	zig-zag	$\frac{2K}{\sqrt{3}}$					330°	11	Yz11
--------	---------	-----------------------	---	---	---	--	------	----	------

### 8. LA CONVERSIONE DC/DC

Il dispositivo analizzato nelle sezioni precedenti rappresenta una ottima approssimazione del componente “trasformatore ideale” in regime di corrente alternata. Tuttavia in regime stazionario lo stesso dispositivo è equivalente ad una coppia di resistori. Quindi, per approssimare il trasformatore ideale in regime stazionario è necessario impiegare un dispositivo differente. Si utilizzano solitamente circuiti con interruttori in commutazione (ne esistono vari tipi). Il circuito non è rigorosamente in regime stazionario (in effetti è in regime periodico), tuttavia la frequenza di commutazione degli interruttori ed i parametri dei componenti del circuito possono essere scelti in modo tale che tutte le armoniche di tensione (o di corrente) siano molto minori rispetto al valore medio. A titolo di esempio si consideri il circuito del secondo ordine mostrato in figura 16. Tutti i parametri (E, R, L, C, G) sono costanti nel tempo. L'interruttore a due posizioni indicato con S commuta periodicamente (sia T il periodo ed  $f = 1/T$  la frequenza) e si assume  $0 < D < 1$ . Per determinare il circuito equivalente del doppio bipolo contenuto entro la linea tratteggiata si considerino i due circuiti illustrati in figura 17.a e 17.b, corrispondenti agli stati on e off dell'interruttore.

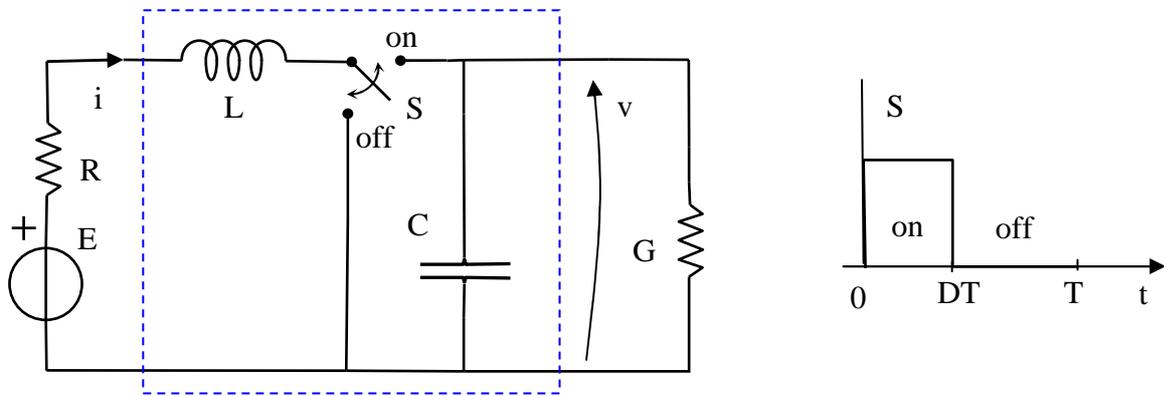


Figura 16.

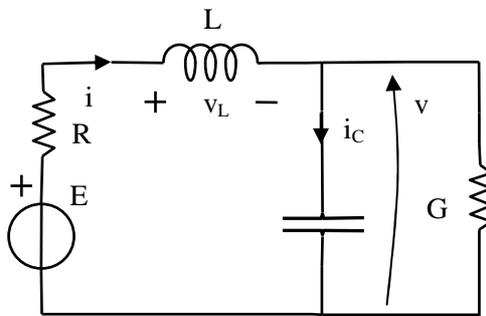


Figura 17.a - On

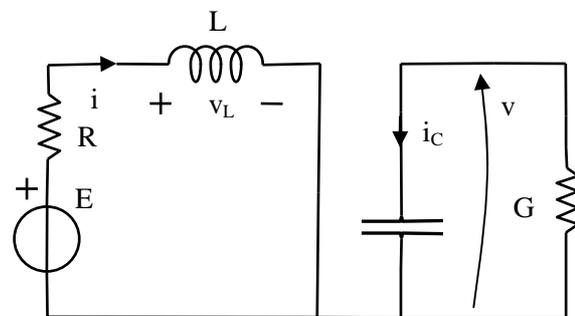


Figura 17.b - Off

Valido per  $0 < t < DT$  (+ multipli interi di T).  
LKT ed LKC forniscono:

Valido per  $DT < t < T$  (+ multipli interi di T).  
LKT ed LKC forniscono:

$$v_L = E - Ri - v \quad (6.a)$$

$$i_C = i - Gv \quad (7.a)$$

$$v_L = E - Ri \quad (6.b)$$

$$i_C = -Gv \quad (7.b)$$

Se il circuito è in regime periodico<sup>(\*)</sup>, la tensione sull'induttore e la corrente sul condensatore hanno valore medio nullo. Infatti, ricordando che le variabili di stato (corrente  $i$  sull'induttore e tensione  $v$  sul condensatore) sono funzioni continue del tempo, si ha:

$$\langle v_L \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T v_L(t) dt = \frac{L}{T} \int_0^T \frac{di}{dt}(t) dt = \frac{L}{T} [i(T) - i(0)] = 0 \quad (8.a)$$

$$\langle i_C \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T i_C(t) dt = \frac{C}{T} \int_0^T \frac{dv}{dt}(t) dt = \frac{C}{T} [v(T) - v(0)] = 0 \quad (8.b)$$

Si ha quindi, considerando nuovamente la definizione di valore medio, dividendo l'integrale di media nei due intervalli di funzionamento on e off e sostituendo le equazioni (6.a) e (6.b):

$$\langle v_L \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T v_L(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{DT} v_L(t) dt + \frac{1}{T} \int_{DT}^T v_L(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{DT} E dt - \frac{1}{T} \int_0^{DT} Ri dt - \frac{1}{T} \int_0^{DT} v dt + \frac{1}{T} \int_{DT}^T E dt - \frac{1}{T} \int_{DT}^T Ri dt$$

Tenendo conto della (8.a) e posto  $I = \langle i \rangle$  e  $V = \langle v \rangle$  si ha quindi:

$$0 = E - RI - D \left( \frac{1}{DT} \int_0^{DT} v dt \right) \cong E - RI - DV \quad (9.a)$$

Analogamente, dalle (7.a) e (7.b) si ottiene:

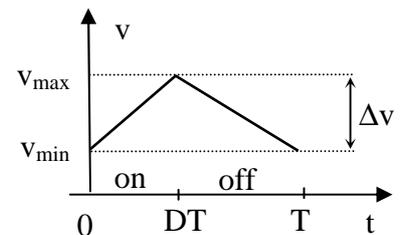
$$\langle i_C \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T i_C(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{DT} i_C(t) dt + \frac{1}{T} \int_{DT}^T i_C(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{DT} i dt - \frac{G}{T} \int_0^{DT} v dt - \frac{G}{T} \int_{DT}^T v dt$$

Tenendo conto della (8.b) si ha quindi:

$$0 = D \left( \frac{1}{DT} \int_0^{DT} i dt \right) - GV \cong DI - GV \quad (9.b)$$

Le (9.a) e (9.b) sono valide se la media delle variabili di stato nell'intervallo  $0 < t < DT$  è pari al valor medio sul periodo. Grazie alla continuità delle variabili di stato e supponendo che  $T$  sia molto minore delle costanti di tempo dei circuiti 17.a e 17. b (in modo da poter approssimare con tratti lineari gli andamenti nel tempo di  $v$  ed  $i$ ) si ha infatti:

$$\frac{1}{DT} \int_0^{DT} v dt \cong \frac{1}{DT} \frac{v_{\max} + v_{\min}}{2} DT = \frac{1}{T} \frac{v_{\max} + v_{\min}}{2} T \cong \frac{1}{T} \int_0^T v dt = V$$



Utilizzando le (9.a) e (9.b) come LK per i valori medi si ottiene il circuito equivalente di figura 18. Il doppio bipolo contenuto entro la linea tratteggiata è uno dei circuiti equivalenti del trasformatore ideale con rapporto di trasformazione pari a  $D$ .

<sup>(\*)</sup> Tutte le variabili circuitali sono funzioni periodiche del tempo con lo stesso periodo.

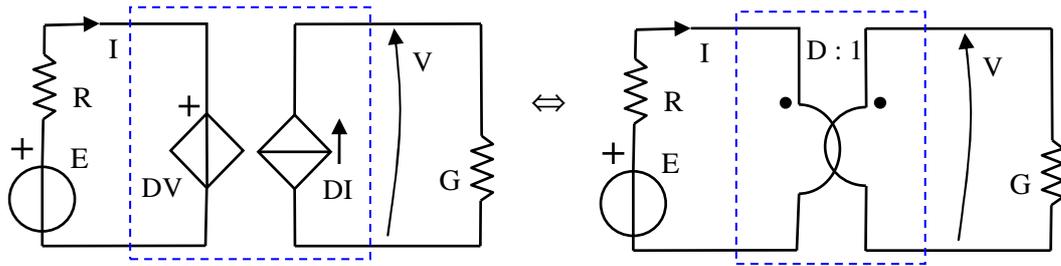


Figura 18.

Infine, le oscillazioni delle variabili di stato si possono ridurre a piacere agendo sia sulla frequenza di commutazione, sia sui valori di L e C. Si ha infatti (supponendo  $\Delta v \ll V$  e  $\Delta i \ll I$ ):

$$\Delta v \cong DT \left. \frac{dv}{dt} \right|_{\text{on}} = \frac{DT}{C} i_{C,\text{on}} = \frac{D}{fC} (i - Gv) \cong \frac{D}{fC} (I - GV) = \frac{D(1-D)I}{fC}$$

e analogamente:

$$\Delta i \cong (1-D)T \left. \frac{di}{dt} \right|_{\text{off}} = \frac{(1-D)T}{L} v_{L,\text{off}} = \frac{(1-D)}{fL} (E - Ri) \cong \frac{(1-D)}{fL} (E - RI) = \frac{D(1-D)V}{fL}$$

Senza approfondire oltre, è chiaro tuttavia che controllando opportunamente S è possibile variare anche l'andamento nel tempo della tensione sul carico. In effetti schemi simili a questo (ma con più di un interruttore) sono utilizzati per realizzare anche la conversione DC/AC.