

ELETTROMAGNETISMO

1. DEFINIZIONI ED EQUAZIONI DI MAXWELL

Definizione di campo elettrico e di induzione magnetica: si consideri la forza esercitata su una carica puntiforme in moto (Forza di Lorentz)

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

\mathbf{F} = forza agente sulla carica puntiforme [N]; q = carica elettrica [C]; \mathbf{v} = velocità della carica [m/s]; \mathbf{E} = campo elettrico [V/m]; \mathbf{B} = induzione magnetica [T].

La campo elettrico \mathbf{E} è definito come la forza \mathbf{F} per unità di carica agente su una carica puntiforme collocata nel punto in esame e ferma ($\mathbf{v} = 0$) rispetto all'osservatore in un riferimento inerziale. Supponendo noto \mathbf{E} , la forza $\mathbf{F} - q\mathbf{E}$ è pari a $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (forza che è ortogonale a \mathbf{v} e che dunque non compie lavoro). Tale termine è utilizzato per definire l'induzione magnetica \mathbf{B} nel punto "attraversato" dalla carica q nell'istante considerato). La conoscenza di $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ non permette di determinare la componente di \mathbf{B} parallela a \mathbf{v} , quindi per determinare \mathbf{B} è necessaria almeno una coppia di misure nello stesso punto con velocità vettorialmente diverse.

Definizione di densità di carica (ρ). Si consideri un punto P dello spazio ed un elemento di volume τ centrato in P.

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta\tau}$$

ΔQ = carica elettrica presente in τ [C]; $\Delta\tau$ = volume di τ [m³].

Definizione di densità di corrente (\mathbf{J}). Si consideri un punto P dello spazio ed una superficie piana passante per P.

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q / \Delta t}{\Delta S}$$

\mathbf{n} = versore normale alla superficie; ΔS = area dell'elemento di superficie considerato centrato in P [m²]; ΔQ = carica elettrica che ha attraversato l'elemento di superficie nel verso individuato da \mathbf{n} [C]; Δt = intervallo di tempo considerato [s].

Definizione di polarizzazione (\mathbf{P}). L'azione di un campo elettrico \mathbf{E} su un materiale (non conduttore) può essere descritta assumendo che ogni volumetto $\Delta\tau$ di materia divenga sede di un dipolo elettrico⁽¹⁾ con momento $\Delta\mathbf{p}$. Lo stato della materia polarizzata può quindi essere definito tramite la densità di dipoli elettrici.

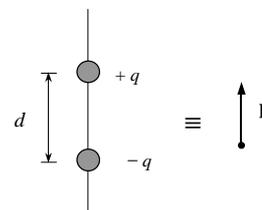
$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta\tau}$$

Definizione di magnetizzazione (\mathbf{M}). L'azione di un campo di induzione \mathbf{B} su un materiale può essere descritta assumendo che ogni volumetto $\Delta\tau$ di materia divenga sede di un dipolo magnetico⁽²⁾ con momento infinitesimo $\Delta\mathbf{m}$. Lo stato della materia magnetizzata può quindi essere definito tramite la densità di dipoli magnetici.

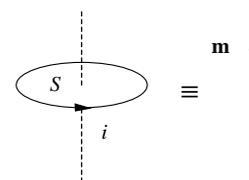
$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{m}}{\Delta\tau}$$

Definizione del campo spostamento elettrico e del campo magnetico

⁽¹⁾ Si consideri il sistema costituito da due cariche puntiformi di valore opposto, $+q$ e $-q$, situate nel vuoto ad una distanza d , e si consideri il limite al quale tende tale sistema quando d e q tendono rispettivamente a 0 e a $+\infty$, in modo tale che il prodotto qd tenda ad una quantità p finita e non nulla. Il sistema che si ottiene si chiama **dipolo elettrico**. Per caratterizzare il dipolo occorre individuare: 1) la *direzione* della retta sulla quale sono poste le due cariche; 2) il *verso* (da quella negativa a quella positiva); 3) il *valore* p . Occorre perciò un vettore \mathbf{p} detto **momento del dipolo elettrico**.



⁽²⁾ Si consideri il sistema costituito da una corrente i che percorre una spira circolare piana: sia S l'area della spira. Si consideri il limite al quale tende tale sistema quando S e i tendono rispettivamente a 0 e a $+\infty$, in modo tale che il prodotto iS tenda ad una quantità m finita e non nulla. Il sistema che si ottiene si chiama **dipolo magnetico**. Per caratterizzare il dipolo occorre individuare: 1) la giacitura del piano della spira, e ciò può farsi assegnando la *direzione* della normale al piano; 2) il *verso* della corrente i nella spira, e ciò può farsi assegnando un verso sulla direzione precedente: quello destrogiro rispetto al verso della corrente i ; 3) il *valore* m . Occorre perciò un vettore \mathbf{m} detto **momento del dipolo magnetico**.



$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

\mathbf{D} = spostamento elettrico [C/m²]; \mathbf{H} = campo magnetico [A/m]; ϵ_0 = costante dielettrica del vuoto (8.854 10⁻¹² F/m); μ_0 = permeabilità magnetica del vuoto (4 π 10⁻⁷ H/m \cong 1.256 10⁻⁶ H/m).

Spesso è possibile supporre che la polarizzazione elettrica sia proporzionale al campo elettrico e che la magnetizzazione sia proporzionale al campo magnetico (materiale lineare omogeneo isotropo):

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

dove χ_e , χ_m sono le suscettività elettrica e magnetica. In tal caso si ha:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

dove $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ = costante dielettrica relativa; $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ = costante dielettrica del materiale

$\mu_r = 1 + \chi_m$ = permeabilità magnetica relativa; $\mu = \mu_r \mu_0$ = permeabilità magnetica del materiale.

EQUAZIONI DI MAXWELL (IN FORMA INTEGRALE)

Legge di Ampère - Maxwell (legge della circuitazione magnetica): *la circuitazione del vettore campo magnetico lungo una linea chiusa qualsiasi è pari alla corrente totale concatenata con tale linea.*

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_c$$

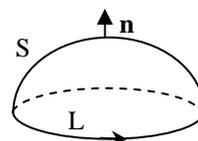
Legge di Faraday - Neumann - Lenz (legge della circuitazione elettrica): *la circuitazione del vettore campo elettrico lungo una linea chiusa qualsiasi è pari alla derivata temporale del flusso di induzione magnetica concatenato con tale linea cambiata di segno.*

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_c}{dt}$$

La corrente concatenata i_c ed il flusso concatenato Φ_c sono definiti con riferimento ad una superficie S che ha come bordo la curva chiusa L . L'orientamento della superficie è dato dal versore \mathbf{n} associato al verso di percorrenza di L , secondo la convenzione destrogira (regola della vite destrorsa). La corrente concatenata i_c ed il flusso concatenato Φ_c non dipendono dalla superficie S , ma solo dalla curva L su cui tale superficie si appoggia.

$$i_c = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\Phi_c = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$



Si hanno inoltre (equazioni della divergenza):

- la **legge di Gauss**: *il flusso dello spostamento elettrico attraverso una superficie chiusa qualsiasi è pari alla quantità di carica racchiusa in tale superficie.*

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q$$

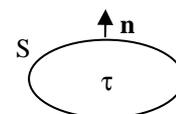
- la **solenoidalità del campo di induzione magnetica**: *il flusso della induzione magnetica attraverso una superficie chiusa qualsiasi è nullo.*

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

- la **legge di conservazione della carica**: *il flusso della densità di corrente uscente da una superficie chiusa qualsiasi è pari alla derivata temporale della carica racchiusa in tale superficie.*

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{dQ}{dt}$$

La carica Q contenuta entro una superficie chiusa S (orientata tramite il versore \mathbf{n} diretto verso l'esterno) si può calcolare con riferimento al volume τ che ha S come bordo: $Q = \int_{\tau} \rho d\tau$



Infine la **legge di Lorentz** fornisce la densità di forza elettromagnetica esercitata sulla densità di carica ρ e sulla densità di corrente \mathbf{J} .

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

Il problema elettrodinamico è completato introducendo le **equazioni di legame materiale**; se si considerano **mezzi lineari, omogenei** (indipendenza dalla posizione), e **isotropi** (indipendenza dalla direzione), le equazioni di legame materiale sono:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

dove ϵ , μ e σ sono rispettivamente la **costante dielettrica**, la **permeabilità magnetica** e la **conduttività elettrica**. Si definisce inoltre la resistività ρ (misurata in $\Omega \cdot m$) come l'inverso della conduttività σ (misurata in S/m). La relazione tra densità di corrente e campo elettrico è detta **legge di Ohm in forma locale**. Il vettore \mathbf{E}_i che vi compare è il campo elettrico impresso. Tale vettore, essenziale per ottenere una circolazione di corrente, ha le dimensioni di una forza per unità di carica [N/C]: esercita azioni di forza sui portatori (dotati di massa) delle cariche elettriche tramite fenomeni non elettrici (a seconda dei casi di natura chimica, termica, meccanica, ecc.). I dispositivi entro cui hanno sede i fenomeni suddetti, sono denominati "generatori elettrici".

Nei materiali conduttori (metalli) la resistività varia linearmente con la temperatura con un coefficiente di temperatura α : $\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$, per $-50^\circ\text{C} < T < 150^\circ\text{C}$.

Materiale conduttore	ρ [n $\Omega \cdot m$]	σ [MS/m]	α [m $\Omega / (\Omega \cdot K)$] (a 20°C)
Argento (99.9%)	16	62.5	3.8
Rame elettrolitico	17.6	56.8	3.9
Oro	23.6	42.4	3.0
Alluminio	28	35.7	4
Ferro (99%)	100 ÷ 150	6.7 ÷ 10	5.5
Ghisa	700 ÷ 1600	0.6 ÷ 1.4	2.0 ÷ 4.5
Acciaio (0.1% C)	200	5	4.2
Acciaio (0.4% C)	160	6.2	4.2
Acciaio (2% Si)	350	2.8	3.0 ÷ 5.0
Acciaio (4% Si)	550	1.8	3.0 ÷ 5.0
Grafite	4000 ÷ 20000	0.05 ÷ 0.25	0.4

Nei materiali isolanti (o dielettrici) ϵ_r ha un valore di qualche unità. Più rilevante è la **rigidità dielettrica** che è l'intensità K del campo elettrico che provoca la scarica attraverso l'isolante. Nei gas e nei liquidi la scarica provoca la ionizzazione di una parte delle molecole, però al cessare della scarica il dielettrico si ricostituisce e riacquista le sue proprietà isolanti (per l'aria secca $K \cong 3$ MV/m). Nei solidi la scarica porta alla distruzione del dielettrico che rimane perforato (ed inutilizzabile).

Materiale isolante	ρ [G $\Omega \cdot m$]	ϵ_r	K [MV/m]
Porcellana	1 ÷ 10 ⁴	4 ÷ 6	10 ÷ 12
Bachelite	1 ÷ 10	5 ÷ 7	10 ÷ 12
Carta secca	1 ÷ 10	2 ÷ 3	4 ÷ 6
Vetro	10 ² ÷ 10 ⁵	4 ÷ 10	30 ÷ 150
Gomma	10 ³ ÷ 10 ⁵	2 ÷ 3	16 ÷ 50
Carta paraffinata	10 ⁵	2 ÷ 4	10 ÷ 20

I materiali si dividono in dia-, para- e ferro-magnetici a seconda della loro risposta al campo magnetico applicato:

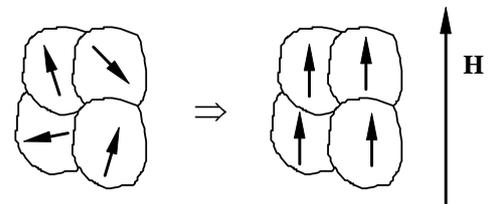
Diamagnetismo: In alcuni materiali (tra cui il rame) si ha una perfetta compensazione tra i momenti magnetici di ogni singolo atomo. In tal caso l'applicazione di un campo magnetico esterno anche molto intenso dà luogo ad una magnetizzazione molto debole e diretta in verso opposto al campo. La suscettività χ_m è quindi negativa. Si tratta di suscettività molto piccole ed indipendenti dalla temperatura (dell'ordine di -10^{-5}).

Paramagnetismo: Se gli atomi o le molecole possiedono un momento magnetico proprio, l'azione del campo esterno produce un allineamento parziale dei momenti secondo il verso del campo. Tale

effetto magnetizzante è il risultato dell'equilibrio tra l'azione ordinatrice del campo e quella dell'agitazione termica. Se l'interazione magnetica tra atomi adiacenti è trascurabile, non si ha magnetizzazione spontanea a livello macroscopico: la suscettività χ_m è positiva ed ha valori molto modesti alla temperatura ambiente (dell'ordine di 10^{-3}). Essa decresce al crescere della temperatura secondo la Legge di Curie: $\chi_m = C/T$. Pertanto i materiali paramagnetici, come quelli diamagnetici, modificano in modo inessenziale i campi prodotti "nel vuoto" ($\mu_r \cong 1$, ovvero $\mu \cong \mu_0$).

Ferromagnetismo: Quando gli atomi, gli ioni o le molecole possiedono un momento magnetico proprio e sono fortemente interagenti tra loro, è possibile raggiungere la saturazione (cioè il parallelismo di tutti i dipoli magnetici) a temperatura ambiente con campi esterni facilmente realizzabili. Ad esempio per ferro, nickel e cobalto i riscontrano vistosi fenomeni di magnetizzazione spontanea (in assenza di campo magnetico). Per quanto riguarda la dipendenza dalla temperatura, per $T > T_C$ (temperatura di Curie) si ha un comportamento paramagnetico e quindi una suscettività magnetica che segue la Legge di Curie - Weiss: $\chi_m = C/(T - T_C)$. Questo insieme di proprietà, ma particolarmente quella di poter dar luogo ad intense magnetizzazioni con deboli campi applicati in materiali di ottimo comportamento meccanico - strutturale, rende il ferromagnetismo di fondamentale importanza per le applicazioni.

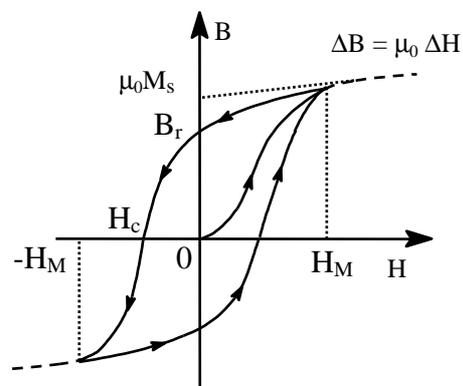
Dal punto di vista microscopico, i materiali ferromagnetici sono formati dall'aggregazione di innumerevoli "domini magnetici" o "domini di Weiss" delle dimensioni di $10^{-3} \div 10^{-6}$ m che sono composti da molecole o atomi che possiedono un momento magnetico proprio e sono allineati fra loro. Se il materiale è allo stato nativo i momenti magnetici dei domini di Weiss sono orientati casualmente, producendo quindi una magnetizzazione macroscopicamente nulla. In presenza di un campo magnetico esterno, tuttavia, i momenti magnetici tendono ad allinearsi. Tale allineamento permane anche se il campo magnetico esterno è rimosso, dando origine ad una magnetizzazione residua. Tale effetto magnetizzante è il risultato dell'equilibrio statistico tra l'azione ordinatrice del campo e quella dell'agitazione termica: aumentando la temperatura l'effetto dell'agitazione diventa sempre più sensibile, causando la completa smagnetizzazione quando si raggiunge la temperatura di Curie.



Domini di Weiss prima e dopo l'allineamento con il campo magnetico esterno

Per studiare i materiali ferromagnetici ci si basa, in concreto, sulle **caratteristiche di magnetizzazione**, cioè sui diagrammi che forniscono il valore in modulo e verso dell'induzione magnetica B in funzione del campo magnetico H per provini omogenei.

In figura è rappresentato un tipico processo di magnetizzazione. Il materiale sia allo stato nativo (smagnetizzato). Si distinguono una curva di prima magnetizzazione, (H crescente da 0 ad H_M) Se il campo magnetico viene invertito ripetutamente tra i valori $\pm H_M$, l'evoluzione si assesta su cicli simmetrici di **isteresi**. Al variare di H_M varia l'ampiezza dei cicli. Il raggiungimento della saturazione è evidenziato dal fatto che la caratteristica diventa lineare e reversibile. Ovvero, per campi maggiori di H_M , l'incremento ΔB corrispondente ad un incremento ΔH è lo stesso che si avrebbe nel vuoto, $\mu_0 \Delta H$.



Il ciclo di isteresi che viene solitamente considerato è quello ottenuto a partire dalla saturazione. I principali parametri usualmente considerati per la caratterizzazione dei materiali sono:

- le permeabilità relative differenziali valutate lungo la curva di prima magnetizzazione secondo la formula $\mu_{r(d)} = dB/(\mu_0 dH)$, in particolare quella iniziale ($H = 0$) e quella massima;
- l'induzione residua B_r che si ha quando H viene riportato a zero dopo avere raggiunto H_M ;
- il campo coercitivo H_c che è necessario applicare per portare a zero l'induzione B ;
- il valore della magnetizzazione di saturazione M_s (o del campo di saturazione $B_s = \mu_0 M_s$);
- alcuni valori di energie specifiche del ciclo, quali l'area del ciclo W_{ist} oppure il valore del massimo del prodotto $|BH|$ nel 2° quadrante.

Un importante sottogruppo nei materiali ferromagnetici è dato dai **materiali ferromagnetici dolci** che sono caratterizzati da elevati valori della permeabilità ($\mu_r \sim 10^3$) e basso valore del campo coercitivo ($H_c < 10^3$ A/m) cui si collega il basso valore dell'area del ciclo di isteresi. I materiali di questo gruppo vengono impiegati laddove interessa limitare al massimo le correnti necessarie per produrre e controllare i flussi di induzione (nuclei di elettromagneti, nuclei di trasformatori, rotori e statori di macchine rotanti). I materiali di questo gruppo principalmente utilizzati sono il ferro e le sue leghe con nickel, cobalto e silicio, gli acciai a basso tenore di carbonio e le ferriti dolci (ossidi di ferro, zinco e manganese o nickel).

Un altro importante sottogruppo nei materiali ferromagnetici è dato dai **materiali ferromagnetici duri** (magneti permanenti) che sono caratterizzati da elevati valori della induzione residua e del campo coercitivo ($H_c > 10^4$ A/m) cui si collega l'elevato valore del prodotto $|BH|$ ottenuto nel 2° quadrante. I materiali di questo gruppo vengono impiegati laddove interessa realizzare flussi magnetici costanti nel tempo e pertanto conviene ricorrere al magnetismo permanente invece che a circuiti percorsi da corrente. I materiali magnetici duri commercialmente più importanti sono le ferriti dure (ossidi di ferro e bario), gli Alnico (leghe Fe-Al-Ni-Co-Cu) e le leghe ed i sinterizzati comprendenti terre rare. In particolare, i magneti permanenti samario-cobalto (Sm-Co) e neodimio-ferro-boro (Nd-Fe-B) hanno prestazioni (e costi) decisamente superiori. Questi magneti sono prodotti per sinterizzazione, ma anche mescolati a leganti plastici per migliorare le caratteristiche meccaniche e la lavorabilità.

2. PASSAGGIO DALLA TEORIA DEI CAMPI ALLA TEORIA DEI CIRCUITI

Affinché un sistema elettrico reale sia modellabile come un “circuito elettrico a costanti concentrate” devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

1. deve essere possibile individuare, nella regione di spazio occupata dal sistema fisico reale, delle zone di spazio, dette componenti, in cui alcune grandezze elettromagnetiche (e le loro derivate temporali) possono assumere valori elevati;

1.a per ciascun componente, deve essere possibile individuare dei terminali attraverso i quali avviene lo scambio di carica elettrica tra un componente e l'altro;

1.b all'esterno dei componenti, deve essere possibile individuare delle connessioni conduttrici (ideali) tra i terminali dei componenti.

2. nella regione di spazio esterna ai componenti (in cui si trovano i terminali e le connessioni tra di essi), si deve potere:

2.a trascurare la corrente di spostamento $\Rightarrow (\partial \mathbf{D} / \partial t) = 0$;

2.b trascurare la componente non conservativa del campo elettrico $\Rightarrow (\partial \mathbf{B} / \partial t) = 0$;

2.c assumere che la densità di corrente sia nulla ovunque, eccetto che nelle connessioni ideali.

L'approssimazione alla base del modello di circuito elettrico a costanti concentrate consiste dunque fondamentalmente nel considerare le derivate temporali di alcune grandezze diverse da zero soltanto in alcune regioni (componenti). Ogni componente così individuato (induttore, condensatore,

etc.) può ritenersi responsabile, quasi per intero, di una proprietà che, a rigore, appartiene al sistema nel suo complesso (induttanza, capacità, etc.).

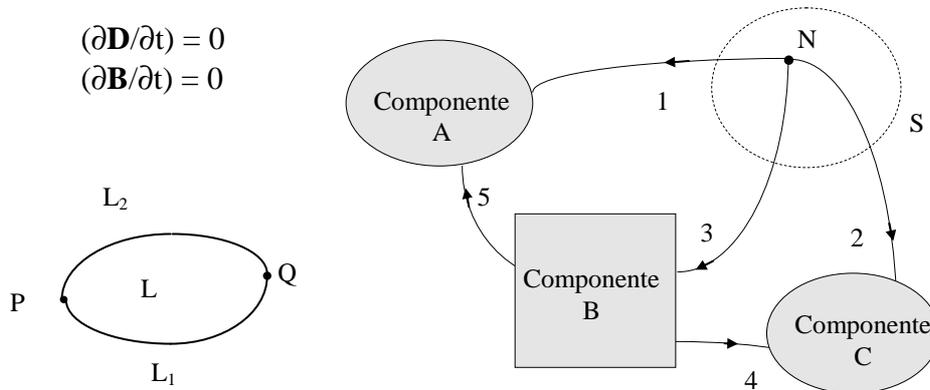
Il legame tra le variabili circuitali (tensioni e correnti) ed i campi sono ottenibili dalle definizioni. Dato che $i = dq/dt$, per la densità di corrente si ottiene $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = di/dS$ e quindi, integrando su una superficie S assegnata si ottiene:

$$i = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$$

Inoltre, dato che $v_{BA} = dw_{A \rightarrow B}/dq$, esprimendo il lavoro delle forze esterne tramite la loro equilibrante (la forza di Lorentz) e dato che il termine dipendente dalla velocità non compie lavoro, si ottiene (evidenziando la dipendenza dalla linea l che congiunge i punti A e B):

$$v_{AB(l)} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Le ipotesi fatte permettono infine di dedurre le leggi di Kirchhoff a partire dalle equazioni di Maxwell, come segue.



Lo spazio esterno ai componenti è una regione a connessione lineare semplice: presa una qualsiasi linea chiusa L che giace in tale regione, esiste almeno una superficie che si appoggia a tale linea che giace anch'essa tutta all'interno della regione considerata.

Poiché per ipotesi $(\partial \mathbf{B} / \partial t) = 0$ la derivata temporale del flusso concatenato è nulla e la Legge di Faraday, applicata alla linea chiusa L che contiene i punti P e Q , diventa:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_Q^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Ne consegue che la tensione v_{PQ} non dipende dalla particolare linea tra P e Q ma unicamente dai punti P e Q (si dice che il campo elettrico è conservativo).

$$\int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = v_{PQ}$$

Nessun sistema elettrico reale verifica esattamente le ipotesi assunte per quello sopra descritto; tali ipotesi sono però soddisfatte con buona approssimazione per molti sistemi reali, per descrivere i quali si fa uso del modello "circuito elettrico a costanti concentrate". In particolare, per tali sistemi, la circuitazione del campo elettrico lungo una linea che congiunge due punti non è indipendente dalla linea scelta, ma la dipendenza risulta trascurabile a tutti gli effetti pratici. In tal caso, invece di parlare di "differenza di potenziale", per indicare l'approssimazione fatta, si preferisce parlare di tensione tra i due punti^(*).

Nelle ipotesi fatte è quindi possibile dedurre la **legge di Kirchhoff delle Tensioni** dalla legge di Faraday. Si consideri infatti sulla linea chiusa esterna ai componenti una sequenza di punti (nodi) 1, 2, 3 e si suddivida l'integrale sulla curva chiusa nella somma sui tratti 12, 23 e 31:

^(*) Infatti se il campo elettrico è conservativo allora è il gradiente di un potenziale scalare: $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Per la tensione tra i punti P e Q si ha quindi $v_{PQ} = \phi_P - \phi_Q$, ovvero la tensione tra due punti è uguale alla differenza tra i valori del potenziale scalare ϕ nei due punti.

$$0 = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_2^3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_3^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = v_{12} + v_{23} + v_{31}$$

Data l'arbitrarietà della linea e della suddivisione si può quindi affermare che per una qualsiasi sequenza chiusa di nodi la somma delle tensioni tra coppie ordinate di nodi successivi è nulla (LKT).

Si consideri ora una superficie chiusa S qualsiasi che giace nello spazio esterno ai componenti, ad esempio quella che racchiude in nodo N . Poiché per ipotesi $(\partial \mathbf{D} / \partial t) = 0$ per la legge di Gauss la derivata temporale della carica entro S è nulla e la legge di conservazione della carica fornisce^(o):

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

Da questa si deduce direttamente **la legge di Kirchhoff delle correnti**. Si supponga, infatti, che la superficie chiusa S intersechi le connessioni (rami) 1, 2, 3 sulle sezioni S_1 , S_2 , ed S_3 . Dato che per ipotesi all'esterno delle connessioni la densità di corrente è nulla, l'integrale sulla superficie S si suddivide nella somma degli integrali sulle sezioni S_1 , S_2 , ed S_3 e dunque, per definizione, alla somma delle correnti che le attraversano.

$$0 = \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_3} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = i_1 + i_2 + i_3$$

Data l'arbitrarietà di S si può quindi affermare che per ogni superficie chiusa che interseca unicamente le connessioni tra i componenti la somma algebrica delle correnti che attraversano la superficie è nulla (LKC). Si noti che il segno delle correnti è definito dalla concordanza del versore \mathbf{n} normale alla superficie con il verso scelto per le correnti sui rami; dato che solitamente si considera il versore esterno, si assumono positive le correnti uscenti e negative quelle entranti in S .

ELETTRODINAMICA STAZIONARIA

Le condizioni che definiscono l'elettrodinamica stazionaria sono $\mathbf{J} \neq 0$ e la condizione di "stazionarietà" $\partial / \partial t = 0$. Pertanto le equazioni di Maxwell si possono essere semplificate e disaccoppiate:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (\text{EJ.1})$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_c \quad (\text{BH.1})$$

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (\text{EJ.2})$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (\text{BH.2})$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \quad (\text{EJ.3})$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{BH.3})$$

Il sistema (EJ) è finalizzato allo studio dei fenomeni elettrodinamici stazionari, ovvero alla determinazione di \mathbf{J} assumendo noto \mathbf{E}_i . Viceversa, il sistema (BH) è finalizzato allo studio dei fenomeni magnetostatici, ovvero alla determinazione di \mathbf{B} assumendo nota \mathbf{J} . Le equazioni (EJ.2) e (BH.2) implicano che i tubi di flusso^(*) dei vettori \mathbf{J} e \mathbf{B} sono chiusi: a tali tubi viene dato il nome, rispettivamente, di "circuiti elettrici" e "circuiti magnetici".

^(o) Questa relazione è ottenibile anche direttamente dalla Legge di Ampère, considerando la superficie chiusa S suddivisa in due superfici S^+ ed S^- con lo stesso contorno Γ (se \mathbf{n} è la normale esterna ad S , S^+ ed S^- , i versi di percorrenza di Γ sono opposti per S^+ ed S^-). Applicando la Legge di Ampere ad S^+ ed S^- gli integrali di circuitazione hanno segni opposti; sommando membro a membro le circuitazioni si cancellano e la somma degli integrali su S^+ ed S^- della densità di corrente si rappresenta come un solo integrale sulla superficie chiusa S .

^(*) Si ricordi che un tubo di flusso di \mathbf{J} è definito come l'unione delle linee di campo \mathbf{J} che intersecano una data superficie aperta. In particolare le linee che attraversano il bordo di tale superficie definiscono la superficie laterale del tubo (ovvero \mathbf{J} è tangente alla superficie laterale del tubo). L'utilità del tubo di flusso è dovuta alla possibilità di identificarlo a priori, sulla base della conoscenza della geometria e delle proprietà dei materiali. Si consideri infatti un conduttore filiforme in rame (o di materiale conduttore), immerso in aria (o isolato). La conducibilità del rame è molto maggiore di

Solitamente si considerano circuiti elettrici “filiformi”, tali cioè che le dimensioni relative ad una generica sezione trasversale ed il raggio di curvatura della linea d’asse siano trascurabili rispetto alle dimensioni longitudinali, per i quali è lecito supporre uniforme la distribuzione di \mathbf{J} sulla sezione trasversale S . Questo porta ad una semplice relazione tra corrente i e modulo della densità di corrente: $i = JS$. La corrente i è costante su tutte sezioni trasversali del circuito (per la LKC).

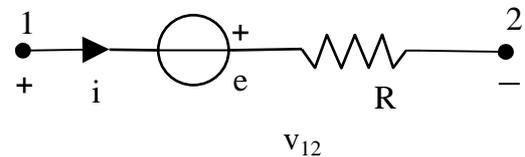
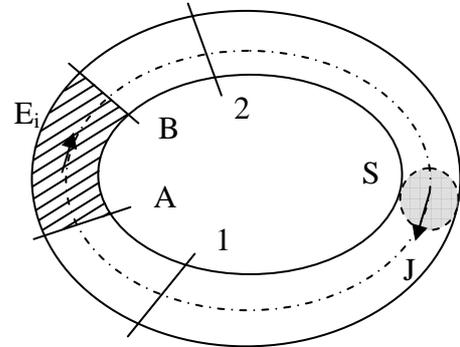
Integrando lungo il circuito in figura dalla sezione 1 alla sezione 2 (attraversando le sezioni A e B) la Legge di Ohm in forma locale $\mathbf{E} + \mathbf{E}_i = \mathbf{J}/\sigma$ si ottiene:

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_1^2 \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = (JS) \int_1^2 \frac{d\mathbf{l}}{\sigma S} \Rightarrow v_{12} + e = R i$$

Questa relazione può quindi essere rappresentata tramite componenti circuitali. La grandezza R è

detta resistenza ed è definita da: $R = \int_1^2 \frac{d\mathbf{l}}{\sigma S}$

Se la sezione S e la conducibilità σ sono costanti, si ottiene $R = l/\sigma S$, dove l è la lunghezza del circuito tra 1 e 2.



Se le sezioni 1 e 2 coincidono $v_{12} = 0$ e quindi per avere corrente non nulla nel circuito è necessario che risulti diversa da zero la tensione impressa^(#) (e quindi anche \mathbf{E}_i). Se $\mathbf{E}_i = 0$ si ha invece $v_{12} = R i$, che prende il nome di Legge di Ohm.

Le considerazioni fatte sui tubi di flusso di \mathbf{J} (circuiti elettrici) si possono ripetere pressoché immutate anche per i tubi di flusso di \mathbf{B} (circuiti magnetici). Si consideri il circuito magnetico semplice rappresentato in figura. Si supponga che il materiale ferromagnetico dolce che compone il circuito abbia permeabilità magnetica molto maggiore di quella dell'aria circostante ($\mu_{Fe} \gg \mu_0$). La sezione S del materiale sia uniforme. L'eccitazione sia fornita da un avvolgimento formato da N spire percorse dalla corrente i . A causa della permeabilità elevata è possibile supporre che il campo di induzione magnetica sia confinato quasi interamente nel materiale.

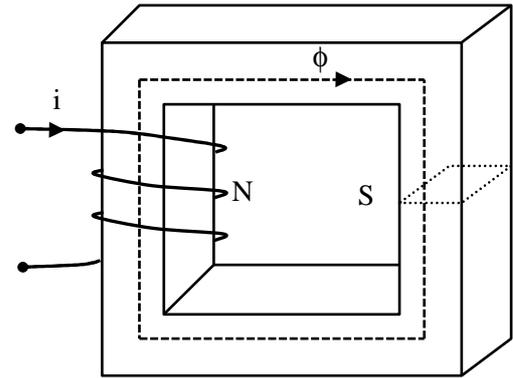
quella dell'aria ($\sigma_{Cu} \gg \sigma_{aria}$); inoltre si può dimostrare che il campo elettrico tangenziale alla superficie di interfaccia rame/aria deve essere continuo. Quindi $J_{Cu}/\sigma_{Cu} = J_{aria}/\sigma_{aria}$ e dunque $J_{Cu} \gg J_{aria}$. La corrente circola quindi essenzialmente nel rame e si può identificare il conduttore con il tubo di flusso di \mathbf{J} .

Per un tubo di flusso di \mathbf{B} il ragionamento è del tutto analogo. Si consideri infatti un nucleo toroidale in ferro (o di materiale ferromagnetico dolce), immerso in aria. La permeabilità del ferro è molto maggiore di quella dell'aria ($\mu_{Fe} \gg \mu_0$); inoltre si può dimostrare che il campo magnetico tangenziale alla superficie di interfaccia ferro/aria deve essere continuo. Quindi $B_{Fe}/\mu_{Cu} = B_{aria}/\mu_0$ e dunque $B_{Fe} \gg B_{aria}$. Il flusso magnetico è confinato quindi essenzialmente nel ferro e si può identificare il nucleo toroidale con il tubo di flusso di \mathbf{B} .

^(#) Spesso indicate come forze elettro-motrici (f.e.m.). Il termine è ingannevole in quanto, come ogni tensione, sono misurate in volt [V].

Il *flusso magnetico* ϕ attraverso una superficie S è definito da: $\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$. L'unità di misura SI del flusso magnetico è il Weber [Wb].

Grazie alla solenoidalità del campo di induzione e supponendo che esso sia confinato quasi interamente nel ferro, il flusso ϕ è costante attraverso una qualsiasi sezione trasversale del nucleo. Dato che la sezione è costante (escludendo i vertici) è lecito assumere che \mathbf{B} sia uniforme sulla sezione. Questo porta alla semplice relazione $\phi = BS$.



Si definisce ora la *forza magnetomotrice* (f.m.m. o amperspire) relativa ad una qualsiasi linea chiusa C concatenata con le N spire di eccitazione che passi all'interno del materiale magnetico come la corrente totale che si concatena con tale linea: $F = N i$. Per la legge di Ampère si ha quindi:

$$F = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (BS) \frac{d\mathbf{l}}{\mu S} = \oint_C \phi \frac{d\mathbf{l}}{\mu S} = \phi \oint_C \frac{d\mathbf{l}}{\mu S} = \mathcal{R} \phi$$

La relazione lineare tra f.m.m. e flusso magnetico appena ottenuta ($F = \mathcal{R} \phi$) è detta **Legge di Hopkinson** e rappresenta l'analogo della legge di Ohm per i circuiti magnetici. La supposizione che il campo di induzione magnetica sia confinato quasi interamente nel materiale permette di effettuare tutti i passaggi eccetto il primo per cui si è considerata l'equazione di legame materiale lineare $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. La grandezza \mathcal{R} che compare è detta *riluttanza* del circuito ed è definita da: $\mathcal{R} = \oint_C \frac{d\mathbf{l}}{\mu S}$

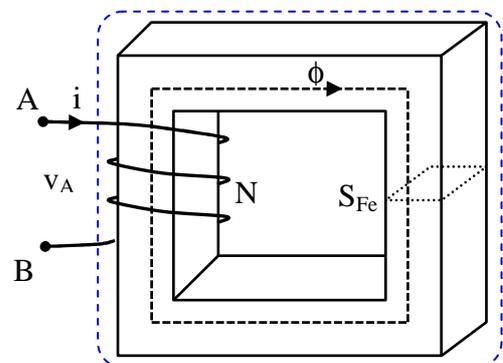
L'unità di misura SI della riluttanza è H^{-1} (ossia l'inverso dell'Henry). Nel caso considerato, in cui la sezione S è uniforme e la permeabilità μ è costante, la riluttanza si può scrivere come $\mathcal{R} = l_{Fe}/\mu S$, dove l_{Fe} rappresenta la lunghezza della linea d'asse del nucleo.

3. INDUTTORE REALE

Si consideri nuovamente il dispositivo rappresentato in figura. Si supponga che il materiale ferromagnetico che compone il circuito magnetico abbia permeabilità molto maggiore di quella dell'aria circostante ($\mu_{Fe} \gg \mu_0$). Si suppone che la sezione S_{Fe} del nucleo magnetico sia uniforme e la linea d'asse del nucleo magnetico abbia lunghezza l_{Fe} . L'eccitazione sia fornita da un avvolgimento in rame (conducibilità σ_{Cu}) formato da N spire (reciprocamente isolate) percorse dalla corrente i . Si suppone che la sezione S_{Cu} dell'avvolgimento sia uniforme e la linea d'asse dell'avvolgimento abbia lunghezza l_{Cu} .

Si vuole determinare la caratteristica tensione-corrente del dispositivo, in modo da poterlo rappresentare tramite uno schema circuitale. A tal fine si consideri la legge di Faraday applicata alla linea chiusa costituita dalla linea d'asse dell'avvolgimento (da A a B, all'interno dell'avvolgimento) unita ad una linea che collega B ad A all'esterno del componente. Si ha quindi:

$$\underbrace{\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}_{\text{nell'avvolgimento}} + \underbrace{\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}_{\text{all'esterno}} = - \frac{d\Phi_c}{dt}$$



Nel primo dei due integrali il campo elettrico è valutato sulla linea d'asse dell'avvolgimento (cioè nel rame), per cui vale la legge di Ohm in forma locale $E = J/\sigma_{Cu}$. Se si assume filiforme l'avvolgimento si ha inoltre $J = i/S_{Cu}$. Pertanto:

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \frac{J}{\sigma_{Cu}} dl = i \int_A^B \frac{dl}{\sigma_{Cu} S_{Cu}} = i \frac{l_{Cu}}{\sigma_{Cu} S_{Cu}} = Ri$$

dove si è posto $R = l_{Cu}/(\sigma_{Cu} S_{Cu})$. Il secondo integrale nella (6.1) è all'esterno del componente (dove si suppongono valide le condizioni per il passaggio dalla teoria dei campi alla teoria dei circuiti) e dunque risulta:

$$\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = v_{BA} = -v_{AB}$$

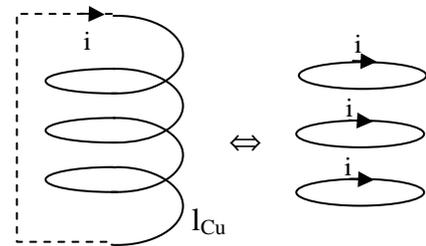
Sostituendo si ha quindi:

$$Ri - v_{AB} = -\frac{d\Phi_c}{dt} \Rightarrow v_{AB} = Ri + \frac{d\Phi_c}{dt}$$

Questa relazione, pur contenendo la corrente i e la tensione v_{AB} , non è ancora la caratteristica cercata. Infatti il flusso concatenato Φ_c non è una variabile circuitale.

Per esprimere Φ_c in funzione della corrente si noti che, per definizione, il campo di induzione andrebbe integrato sulla superficie aperta avente come bordo la linea chiusa definita in figura. Tuttavia è usuale approssimare l'avvolgimento come N spire chiuse, Quindi si ha:

$$\Phi_c \cong N\phi$$



Dalla legge di Hopkinson applicata al circuito magnetico (trascurando l'effetto delle correnti parassite) si ottiene peraltro: $Ni = \mathcal{R}\phi$, dove la riluttanza \mathcal{R} è definita da $\mathcal{R} = l_{Fe}/(\mu_{Fe} S_{Fe})$, e dunque risulta:

$$\Phi_c \cong N\phi = N^2 i/\mathcal{R} = Li$$

dove $L = N^2/\mathcal{R} = N^2 \mu_{Fe} S_{Fe}/l_{Fe}$ (induttanza).

Sostituendo si ottiene infine:

$$v_{AB} = Ri + L \frac{di}{dt}$$

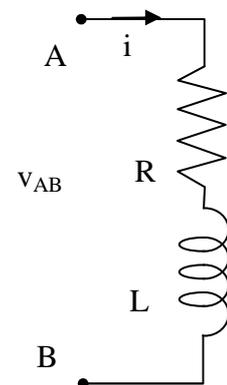
Pertanto il dispositivo, qualora l'intensità della corrente che lo percorre non sia troppo elevata (in modo da poter trascurare la saturazione del materiale ferromagnetico), può essere modellato come un resistore ed un induttore collegati in serie (vedi figura).

Il bilancio di potenza si ottiene moltiplicando la (5.3) per la corrente i :

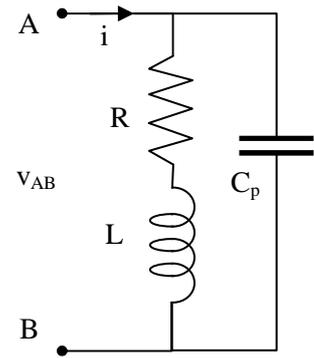
$$v_{AB}i = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$$

Quindi la potenza elettrica assorbita dall'induttore reale ($v_{AB}i$, versi associati con la convenzione da utilizzatore), viene in parte trasformata in energia termica per effetto Joule (Ri^2) ed in parte immagazzinata nel campo magnetico presente all'interno del nucleo ferromagnetico ($Li^2/2$). Tale energia viene chiamata energia magnetica immagazzinata nell'induttore.

Il modello circuitale RL dell'induttore reale è accettabile se è utiliz-



zato in un circuito funzionante alle basse frequenze (inferiori a qualche kHz). All'aumentare della frequenza, tuttavia, diventa sempre più significativa anche la densità di corrente di spostamento ($\partial \mathbf{D} / \partial t$), che è stata trascurata nello scrivere la legge di Hopkinson. Per tenerne conto, si inserisce quindi in parallelo alla serie RL un condensatore parassita C_p (può essere presente in parallelo anche un resistore R_p). Trascurando la resistenza R , si può individuare una pulsazione di (anti)risonanza il cui valore risulta: $\omega_0 = 1/\sqrt{LC_p}$. A pulsazioni superiori a quella di risonanza ha il sopravvento la capacità parassita ed il componente assume un comportamento ohmico-capacitivo.

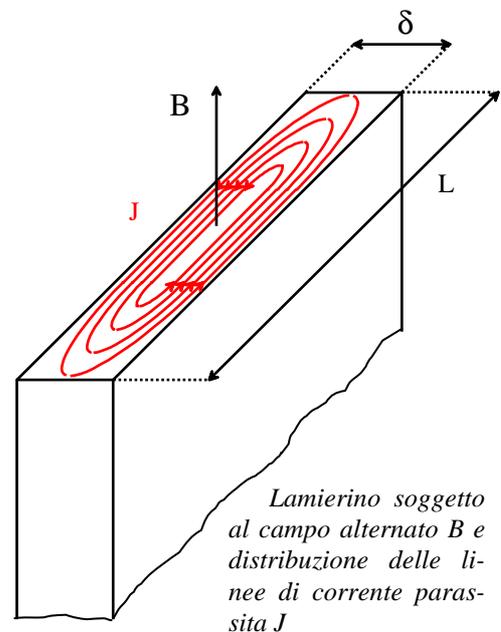


PERDITE NEL FERRO

Le perdite (con questo termine si intende la potenza elettrica trasformata in potenza termica durante ogni variazione di stato di un sistema elettromagnetico) nei materiali ferromagnetici dolci soggetti ad un campo di induzione variabile nel tempo (tipicamente alternato) si dividono in perdite per correnti parassite (o di Foucault) e perdite per isteresi.

Le **perdite per correnti parassite** sono dovute al fatto che, con l'eccezione delle ferriti, i materiali ferromagnetici sono anche conduttori. Per la legge di Faraday un flusso magnetico variabile nel tempo causa un campo elettrico indotto. Se il materiale è conduttore, per la legge di Ohm (in forma locale) al campo elettrico è associata una densità di corrente. Tale corrente è detta parassita in quanto dannosa per due motivi: genera un campo magnetico di reazione che si oppone al campo magnetico forzante, ed è inevitabilmente associata a perdite per conduzione.

La determinazione analitica della densità di corrente parassita è possibile solo per geometrie molto semplici. E' tuttavia possibile tramite un'analisi qualitativa determinare la dipendenza della densità di corrente parassita (e delle perdite) dai dati del problema. Si consideri a tale scopo un lamierino di materiale ferromagnetico dolce di spessore δ immerso in un campo di induzione magnetica



uniforme, variabile nel tempo con legge sinusoidale con valore efficace B e frequenza f . Dalla legge di Faraday si ottiene, integrando sul perimetro della sezione ($2L + 2\delta$) $E \approx \omega B L \delta$, dove E è il valore efficace del campo elettrico sinusoidale indotto ed $\omega = 2\pi f$. Se $\delta \ll L$, si ottiene quindi $E \approx \omega B \delta / 2$. La densità di corrente parassita sarà quindi anch'essa sinusoidale e di valore efficace pari a $J = \sigma E \approx \sigma \omega B \delta / 2$. Alla densità di corrente J corrisponde una densità di potenza dissipata $J^2 / \sigma \approx \sigma \omega^2 B^2 \delta^2 / 4$ (in W/m^3). Dividendo per la densità di massa del materiale si ottiene la potenza dissipata per correnti parassite per unità di massa $P_{cp} = k_{cp} f^2 \delta^2 (B_M)^2$ in $[W/kg]$. Si deduce immediatamente che per ridurre le perdite per correnti parassite conviene utilizzare lamierine sottili. Infatti tutti i circuiti magnetici presenti nei dispositivi in AC (nuclei dei trasformatori, statori e rotori di macchine rotanti) sono realizzati non come blocchi massicci ma sovrapponendo lamierini isolati. L'isolamento è ottenuto con carte impregnate, vernici o film di ossidi o silicati. La scelta dello spessore utilizzato dipende dal compromesso tra perdite accettabili e semplicità costruttiva; di solito δ è dell'ordine dei decimi di mm (0.3 ± 0.5 mm).

Le **perdite per isteresi** sono legate alla irreversibilità del ciclo di isteresi. Infatti si può dimostrare che l'area del ciclo di isteresi w_{ist} rappresenta la densità di energia dissipata nel materiale ferromagnetico in un ciclo.

A tal fine è sufficiente calcolare la potenza media assorbita dall'induttore reale durante un ciclo, supponendo nulle le altre fonti di perdite (resistenza nulla dell'avvolgimento e correnti parassite nel ferro assenti):

$$P_{ist} = \frac{1}{T} \int_0^T v i dt = f \int_{1 \text{ ciclo}} i d\Phi_c = f \int_{1 \text{ ciclo}} Ni d\phi$$

Supponendo uniformi i campi nel nucleo ferromagnetico $Ni = H_{Fe} l_{Fe}$ (dalla legge di Ampere) e $\phi = B_{Fe} S_{Fe}$. Detto $\tau_{Fe} = l_{Fe} S_{Fe}$, il volume del materiale ferromagnetico, la potenza media assorbita è quindi:

$$P_{ist} = f \tau_{Fe} \oint H_{Fe} dB_{Fe} = f \tau_{Fe} w_{ist}$$

dove w_{ist} è l'area del ciclo di isteresi (che quindi rappresenta la densità di energia dissipata per isteresi in un ciclo, misurata in [joule/ciclo·m³]). Solitamente si suppone una relazione di proporzionalità tra l'area del ciclo di isteresi w_{ist} e una potenza del massimo del campo di induzione B_M , con un esponente compreso tra 1.6 e 2 (formula di Steinmetz). Dividendo per il volume e la densità di massa del ferro si ottiene la potenza dissipata per isteresi per unità di massa: $P_{ist} = k_{ist} f (B_M)^{1.6}$ in [W/kg].

Concludendo, le perdite nei circuiti magnetici (convenzionalmente dette **perdite nel ferro**) per isteresi e per correnti parassite dipendono dall'induzione massima B_M , dalla frequenza f , dallo spessore δ e dalla qualità dei lamierini secondo la relazione $C_p = k_{ist} f (B_M)^{1.6} + k_{cp} f^2 \delta^2 (B_M)^2$. Tale **cifra di perdita** C_p tiene conto delle perdite nel ferro per unità di massa come somma di quelle per isteresi e di quelle per correnti parassite. I coefficienti k_{ist} e k_{cp} dipendono dal materiale e dal tipo di lamierino (in particolare dalle lavorazioni meccaniche che ha subito), oltre che dall'unità di misura delle varie grandezze.

4. CONDENSATORE REALE

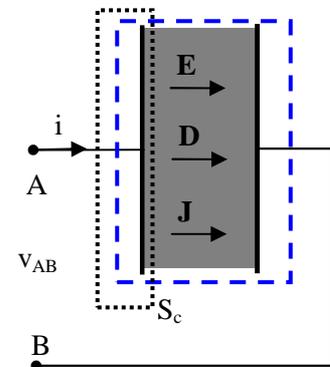
Si consideri il dispositivo rappresentato in figura, costituito da due lamine in materiale conduttore (armature) che per semplicità si suppongono piane e parallele, tra cui è interposto un materiale dielettrico con costante dielettrica ϵ e conducibilità σ . Le armature siano collegate ai terminali A e B tramite connessioni ideali. Si suppone che le armature siano separate dalla distanza l e che la sezione trasversale S del materiale dielettrico sia uniforme. Il dispositivo sia immerso in aria.

Si vuole determinare la caratteristica tensione-corrente del dispositivo, in modo da poterlo rappresentare tramite un circuito. A tal fine si consideri la relazione ottenibile dalla legge di conservazione della carica e dalla legge di Gauss^(o):

$$\oint_{S_c} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

dove la superficie chiusa S_c è rappresentata in figura. La superficie S_c è chiaramente suddivisibile in tre parti: la superficie S tra le armature, l'intersezione con la connessione filiforme (percorsa dalla corrente i) e la parte di superficie che si sviluppa in aria, cioè all'esterno del componente (dove si suppongono valide le condizioni per il passaggio dalla teoria dei campi alla teoria dei circuiti).

Si ha quindi, supponendo i campi E , D e J uniformi tra le armature:



^(o) Si può ottenere anche direttamente dalla Legge di Ampère, considerando una superficie chiusa come limite di una superficie aperta il cui contorno tenda a un punto.

$$-i + \int_S \mathbf{J} \, dS + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \, dS = 0 \quad \Rightarrow \quad -i + \int_S \mathbf{J} \, dS + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \, dS = 0$$

Nel primo dei due integrali \mathbf{J} è valutata all'interno del materiale tra le armature, per cui vale la legge di Ohm in forma locale $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. Inoltre, ammesso che $(\partial \mathbf{B} / \partial t)$ sia nullo, e se l è sufficientemente piccolo, la relazione tra tensione e campo elettrico è approssimabile come $v_{AB} = El$.

Pertanto:

$$\int_S \mathbf{J} \, dS = \int_S \sigma \mathbf{E} \, dS = \int_S \sigma \frac{v_{AB}}{l} \, dS = v_{AB} \int_S \frac{\sigma}{l} \, dS = G v_{AB}$$

dove si è posto $G = \sigma S / l$ (conduttanza).

Inoltre, utilizzando la relazione di legame materiale, si ha:

$$\int_S \mathbf{D} \, dS = \int_S \epsilon \mathbf{E} \, dS = \int_S \epsilon \frac{v_{AB}}{l} \, dS = v_{AB} \int_S \frac{\epsilon}{l} \, dS = C v_{AB}$$

dove si è posto $C = \epsilon S / l$ (capacità).

Sostituendo si ha quindi:

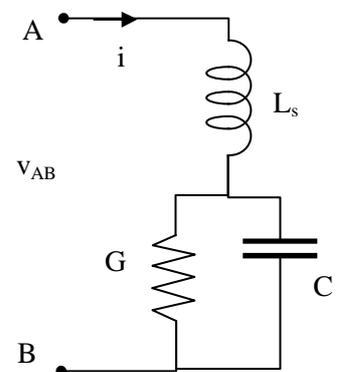
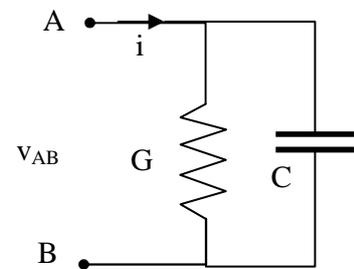
$$i = G v_{AB} + C \frac{d}{dt} v_{AB}$$

Quindi, purché la tensione non sia troppo elevata (in modo da poter escludere la scarica nel materiale dielettrico), il dispositivo può essere modellato come un resistore ed un condensatore collegati in parallelo (vedi figura). Il bilancio di potenza si ottiene moltiplicando per la tensione v_{AB} :

$$v_{AB} i = G v_{AB}^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C v_{AB}^2 \right)$$

Quindi la potenza elettrica assorbita dal condensatore reale ($v_{AB} i$, versi associati con la convenzione da utilizzatore), viene in parte trasformata in energia termica ($G v_{AB}^2$) ed in parte immagazzinata nel campo elettrico presente tra le armature ($C v_{AB}^2 / 2$). Tale energia viene chiamata energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore.

Il modello circuitale del condensatore reale mostrato in figura è accettabile se è utilizzato in un circuito funzionante alle basse frequenze (inferiori a qualche kHz). All'aumentare della frequenza, tuttavia, diventa sempre più significativa anche la $(\partial \mathbf{B} / \partial t)$. Per tenerne conto, si inserisce quindi in serie al parallelo G-C un induttore parassita L_s (può essere presente in serie anche un resistore R_s). Trascurando la conduttanza G , si può individuare una pulsazione di risonanza il cui valore risulta: $\omega_0 = 1 / \sqrt{L_s C}$. A pulsazioni superiori a quella di risonanza ha il sopravvento l'induttanza parassita ed il componente assume un comportamento ohmico-induttivo.



5. LIMITI DI VALIDITÀ DEI CIRCUITI A COSTANTI CONCENTRATE

I circuiti a costanti concentrate sono costituiti dall'interconnessione di componenti ideali, definiti dalle loro caratteristiche tensione-corrente. Ogni componente ideale rappresenta un solo effetto dominante, concentrato tipicamente in un solo parametro. Ad esempio, nel resistore ideale si considera solo la relazione fra densità di corrente e campo elettrico (trascurando la corrente di spostamento e

le tensioni indotte^(#)); nel condensatore ideale si considera solo la relazione fra campo elettrico e corrente di spostamento; nell'induttore ideale si considerano solo le tensioni autoindotte. Per modellare gli elementi reali si possono usare modelli più complessi, ottenuti però collegando elementi ideali. I vari componenti nel circuito interagiscono fra loro solo in termini di tensioni e correnti, cioè soltanto attraverso connessioni ideali, nel senso di conduttori perfettamente equipotenziali. Nei circuiti a costanti concentrate è quindi assente ogni riferimento alle dimensioni del dispositivo studiato ed il loro comportamento è descrivibile tramite equazioni differenziali ordinarie. Negli circuiti a costanti distribuite, invece, non è possibile trascurare le dimensioni e dunque sono descritti da equazioni differenziali alle derivate parziali (per tener conto delle dipendenze spaziali, oltre che temporali, delle grandezze elettriche). La causa è la velocità finita di propagazione del campo elettromagnetico: la velocità della luce.

Una immediata verifica per determinare se un sistema fisico reale possa essere modellato come un circuito elettrico a costanti concentrate (detta c la velocità della luce nel vuoto, 3×10^8 m/s), si può effettuare tramite le condizioni (equivalenti fra loro):

$L_{MAX} \ll c T_{min}$	"Le dimensioni della regione di interesse sono sufficientemente piccole da potere essere trascurate"
$c \gg f_{MAX} L_{MAX}$	"La velocità di propagazione del fenomeno elettromagnetico è infinita"
$L_{MAX}/c \ll T_{min}$	"È nullo il tempo di propagazione del campo elettromagnetico da un punto all'altro della regione di interesse"

dove L_{MAX} è la dimensione massima del sistema che si intende studiare e le grandezze f_{MAX} e T_{min} ($T_{min} = 1/f_{MAX}$) sono, rispettivamente, la frequenza massima ed il periodo temporale minimo che si considerano. La verifica di una di queste condizioni di validità, rappresenta solo una primo test sull'applicabilità della teoria dei circuiti a costanti concentrate nella descrizione di un sistema reale; ogni singolo problema, necessita in realtà di uno studio specifico. Si considerino ora i seguenti tre esempi:

Esempio.1. Circuito su chip lungo 1 mm; la durata minima di un segnale di interesse sia 0.1 ns ($1 \text{ ns} = 10^{-9}$ s). La condizione di validità è verificata, infatti: $L_{MAX}/c = 3.3 \times 10^{-12}$ s $\ll 10^{-10}$ s = T_{min} . Quindi il circuito può essere ritenuto a costanti concentrate.

Esempio.2. Circuito audio alla frequenza di 25 kHz. La condizione di validità è verificata se $L_{MAX} \ll c/f_{MAX} = 12$ km. Così, persino se il circuito avesse un'estensione di qualche centinaio di metri, esso può essere ritenuto a costanti concentrate.

Esempio.3. Circuito per Telecomunicazioni alla frequenza di 1 GHz. La condizione di validità è verificata se $L_{MAX} \ll c/f_{MAX} = 0.3$ m. Assumendo che il simbolo di "molto minore" implichi, come è usuale, una riduzione di almeno due o tre ordini di grandezza, la dimensione massima del circuito che è possibile studiare con il modello a costanti concentrate è di circa $3 \div 0.3$ mm.

Nonostante tutto, a causa della sua semplicità d'uso, la teoria dei circuiti a costanti concentrate viene spesso utilizzata anche per dispositivi che violano le condizioni poste sopra, come ad esempio le linee di trasmissione. In tal caso un modo possibile per ridurre gli errori di modellazione è dividere la linea in tratti sufficientemente brevi da poter soddisfare la condizione di validità di validità su

^(#) Spesso indicate come forze elettro-motrici (f.e.m.). Il termine è ingannevole in quanto, come ogni tensione, sono misurate in volt [V].

ogni tratto. In questo modo è possibile ottenere una versione “discretizzata” della linea che rientra nell’ambito dei circuiti a costanti concentrate. Se tuttavia si considera ogni tratto come tendente ad una lunghezza nulla si ottiene dal passaggio al limite delle LK un modello differente, che prende il nome di circuito a costanti distribuite, in quanto in esso compaiono le proprietà (resistenza longitudinale, induttanza, capacità e conduttanza trasversale) per unità di lunghezza della linea. Le equazioni del modello contengono le derivate parziali (rispetto al tempo ed alla lunghezza della linea) della tensione e della corrente su ogni sezione della linea e, per essere risolte, necessitano di una condizione iniziale (come per le equazioni di stato, di cui sono una generalizzazione) e di condizioni al contorno che specifichino a cosa è collegata la linea alle estremità. La soluzione esatta è possibile per le linee lineari, cioè a parametri costanti.