

## CIRCUITI CON MEMORIA

Vengono detti circuiti con memoria (o circuiti dinamici) quelli in cui è presente almeno un componente dotato di memoria (come induttori e condensatori, ma non solo); in questo caso il sistema risolvibile del circuito stesso contiene le caratteristiche (differenziali) dei componenti con memoria. Il valore di tutte le variabili circuitali in un generico istante può essere calcolato solo dalla conoscenza del valore delle grandezze impresse dai generatori indipendenti nel circuito in tutto l'intervallo temporale precedente all'istante considerato, a partire da un istante iniziale in cui sono note le variabili di stato del sistema (quelle grandezze cui è associata una energia elettromagnetica immagazzinata: la tensione sui condensatori e la corrente negli induttori). Tutti i metodi precedentemente descritti per il caso dei circuiti privi di memoria sono applicabili ai circuiti con memoria, ma portano a scrivere un sistema di equazioni algebrico - differenziali. Ad esempio, per quanto riguarda l'analisi di Tableau, le equazioni costituite dalle LKC e LKT rimangono un sistema di equazioni algebriche lineari che viene però completato dalle caratteristiche dei componenti in cui compaiono i termini differenziali. La maggior parte dei metodi di analisi, sia esatti che numerici, presuppongono che il sistema da risolvere sia in forma normale (o canonica) in cui le derivate sono esplicitate. A tal fine si può utilizzare il metodo delle equazioni di stato, che permette di ottenere un sistema differenziale in forma normale di equazioni differenziali del primo ordine.

### 1. METODO DELLE EQUAZIONI DI STATO

Si consideri un circuito in cui gli unici componenti dotati di memoria siano induttori e condensatori. È possibile pervenire con un procedimento automatico ad un sistema risolvibile costituito da tante equazioni differenziali ordinarie del primo ordine quanti sono i condensatori e gli induttori presenti nel circuito (equazioni di stato), ed in cui le incognite sono le variabili di stato del circuito, e cioè le tensioni tra i terminali dei condensatori e le correnti attraverso gli induttori.

Si proceda come segue:

1. Definire le caratteristiche di induttori e condensatori, esplicitando le derivate di  $v_C$  ed  $i_L$ ;
2. Nel circuito (con memoria) sostituire induttori e condensatori con, rispettivamente, generatori indipendenti di corrente e di tensione (grandezze impresse pari alle variabili di stato  $v_C$  ed  $i_L$ ). Risolvere il circuito (privo di memoria) risultante per determinare le variabili complementari ( $i_C$  e  $v_L$ );
3. Sostituire  $i_C$  e  $v_L$  nelle caratteristiche per ottenere le equazioni di stato.

Si consideri ad esempio il circuito lineare illustrato nella figura 1.a. Le caratteristiche del condensatore e dell'induttore portano a scrivere le seguenti equazioni, in cui sono esplicitate le derivate delle variabili di stato:

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{i_C}{C}, \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{v_L}{L} \quad (1)$$

Per ottenere un sistema di due equazioni (per costruzione differenziali del primo ordine) in due variabili (le variabili di stato  $v_C$  ed  $i_L$ ) è necessario determinare la corrente attraverso il condensatore  $i_C$  e la tensione ai capi dell'induttore  $v_L$  in funzione di  $v_C$  ed  $i_L$ . A tal fine si può procedere supponendo (formalmente) note le variabili di stato. In questo modo il condensatore può essere sostituito, nel circuito, con un generatore di tensione a tensione impressa  $v_C$  e l'induttore con un generatore di corrente a corrente impressa  $i_L$ .

L'utilità di questa sostituzione è dovuta al fatto che il circuito che si ottiene, illustrato nella figura 1.b, è privo di memoria e quindi può essere risolto, con una qualsiasi delle metodologie già viste, per determinare la tensione  $v_L$  e la corrente  $i_C$ .

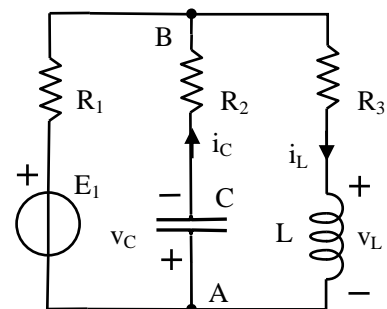


Figura 1.a

In particolare, la soluzione del circuito di figura 1.b può essere ottenuta applicando il teorema di Millman (la serie resistore - generatore di corrente è equivalente al solo generatore di corrente:  $i_3 = -i_L$ ):

$$v_{BA} = \frac{\frac{E_1 - v_C - i_L}{R_1} - \frac{v_C - v_{BA}}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = \frac{E_1 - v_{BA}}{R_1} \\ i_2 = \frac{-v_C - v_{BA}}{R_2} \\ i_3 = -i_L \end{cases} \quad (2)$$

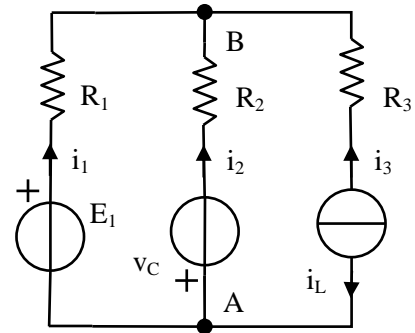


Figura 1.b

È quindi possibile esprimere la corrente  $i_C$  e la tensione  $v_L$  in funzione delle variabili di stato e delle grandezze impresse dai generatori indipendenti (in questo caso,  $E_1$ ):

$$\begin{aligned} i_C &= \frac{-v_C - v_{BA}}{R_2} \\ v_L &= v_{BA} - R_3 i_L \end{aligned} \quad (3)$$

Sostituendo la (2) nella (3) e introducendo per semplicità di notazione le conduttanze si ha:

$$\begin{aligned} i_C &= -\frac{G_1 G_2 E_1}{G_1 + G_2} - \frac{G_1 G_2 v_C}{G_1 + G_2} + \frac{G_2 i_L}{G_1 + G_2} \\ v_L &= \frac{G_1 E_1}{G_1 + G_2} - \frac{G_2 v_C}{G_1 + G_2} - \left( \frac{1}{G_1 + G_2} + R_3 \right) i_L \end{aligned} \quad (4)$$

La sostituzione delle (4) nelle (1) fornisce quindi il risultato voluto, ovvero un sistema differenziale in forma normale:

$$\begin{cases} \frac{dv_C}{dt} = -\frac{G_1 G_2 v_C}{C(G_1 + G_2)} + \frac{G_2 i_L}{C(G_1 + G_2)} - \frac{G_1 G_2 E_1}{C(G_1 + G_2)} \\ \frac{di_L}{dt} = -\frac{G_2 v_C}{L(G_1 + G_2)} - \left( \frac{1}{G_1 + G_2} + R_3 \right) \frac{i_L}{L} + \frac{G_1 E_1}{L(G_1 + G_2)} \end{cases} \quad (5)$$

In forma vettoriale il sistema (5) si scrive come:

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{G_1 G_2}{C(G_1 + G_2)} & \frac{G_2}{C(G_1 + G_2)} \\ -\frac{G_2}{L(G_1 + G_2)} & -\left( \frac{1}{G_1 + G_2} + R_3 \right) \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{G_1 G_2 E_1}{C(G_1 + G_2)} \\ \frac{G_1 E_1}{L(G_1 + G_2)} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Il sistema differenziale a cui si perviene utilizzando il metodo delle equazioni di stato è sempre<sup>(\*)</sup> simile al (6), se il circuito iniziale è lineare (se il circuito non è lineare il metodo è comunque applicabile, ma può essere notevolmente più difficile determinare le variabili complementari alle variabili di stato). Indicando con  $\mathbf{x}$  il vettore delle variabili di stato, con  $[A]$  la matrice dei coefficienti (matrice di stato) e con  $\mathbf{b}$  il vettore degli ingressi (così chiamato in quanto vi compaiono le grandezze impresse dai generatori indipendenti), si ottiene quindi un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti in forma normale (**equazioni di stato**):

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = [A] \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (7)$$

L'ordine del sistema è pari al numero di equazioni che lo costituiscono (ad esempio, il sistema (6) è del secondo ordine) che, per costruzione, è uguale al numero di variabili di stato, cioè al numero di induttori e condensatori presenti nel circuito. La definizione di ordine si estende anche ai circuiti

<sup>(\*)</sup> Questa affermazione si basa unicamente sulla effettiva possibilità di risolvere il circuito privo di memoria ottenuto dalla sostituzione di induttori e condensatori con generatori indipendenti di corrente e tensione, rispettivamente. Ci sono casi in cui tale circuito non è univocamente solubile (ad esempio i circuiti contenenti tagli costituiti solo da induttori o maglie solo di condensatori). Il metodo è ancora applicabile, ma il sistema differenziale deve essere accompagnato da uno (o più) vincoli tra le variabili di stato, che ne complicano la soluzione.

con memoria, indicando come “del primo ordine” i circuiti con un solo induttore o condensatore, “del secondo ordine” i circuiti con due componenti con memoria, eccetera.

Se i dati del problema sono  $E_1 = 110 \text{ V}$ ,  $R_1 = 0.5 \ \Omega$ ,  $R_2 = 0.5 \ \Omega$ ,  $R_3 = 5 \ \Omega$ ,  $C = 200 \ \mu\text{F}$ ,  $L = 3 \ \text{mH}$ , dalla (6) si ottiene, sostituendo:

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \cdot 10^3 & 2.5 \cdot 10^3 \\ -1.66 \cdot 10^2 & -1.75 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -5.5 \cdot 10^5 \\ 1.826 \cdot 10^4 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Per quanto riguarda l'unità di misura dei valori numerici presenti in [A] e b, un modo semplice per dedurli è effettuare un'analisi dimensionale dei vari termini dell'equazione (8). Ad esempio il termine “ $-5 \cdot 10^3$ ” moltiplicato per  $v_C$  [V] deve avere la stessa dimensione della derivata di  $v_C$  [V/s] e quindi ha come unità di misura  $[\text{s}^{-1}]$ . Analogamente il termine “ $2.5 \cdot 10^3$ ” moltiplicato per  $i_L$  [A] deve avere la stessa dimensione della derivata di  $v_C$  [V/s] e quindi ha come unità di misura  $[\Omega/\text{s}]$ . Quindi, la matrice di stato del circuito illustrato nella figura 1.a (con le unità di misura) è:

$$[A] = \begin{bmatrix} -5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} & 2.5 \cdot 10^3 \ \Omega/\text{s} \\ -1.66 \cdot 10^2 \text{ S/s} & -1.75 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

(La matrice di stato, come si vedrà nel seguito è sufficiente a determinare se il circuito è stabile ed il tempo necessario in questo caso per raggiungere il regime.)

La soluzione del sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine (7) può essere ottenuta, eventualmente per via numerica, a partire dall'istante iniziale in cui sono noti i valori  $v_{C0}$  ed  $i_{L0}$  delle variabili di stato (**condizioni iniziali** o stato iniziale):

$$\begin{aligned} v_C(0) &= v_{C0} \\ i_L(0) &= i_{L0} \end{aligned} \quad (10)$$

La definizione dell'istante iniziale, convenzionalmente  $t = 0$ , può avvenire in diversi modi, tuttavia di solito si ha interesse a studiare circuiti in cui interviene una istantanea variazione della topologia, ossia circuiti in cui sono presenti interruttori ideali che si aprono e si chiudono istantaneamente (come mostrato in figura 2). Quando l'interruttore ideale è aperto esso equivale ad un circuito aperto e quindi la corrente che lo attraversa è nulla ( $i = 0$ ). Viceversa quando l'interruttore è chiuso esso equivale ad un corto circuito e la tensione ai suoi capi è nulla ( $v = 0$ )<sup>(#)</sup>. L'istante in cui l'interruttore si apre o si chiude rappresenta in questo caso la scelta usuale per definire l'istante iniziale  $t = 0$ .

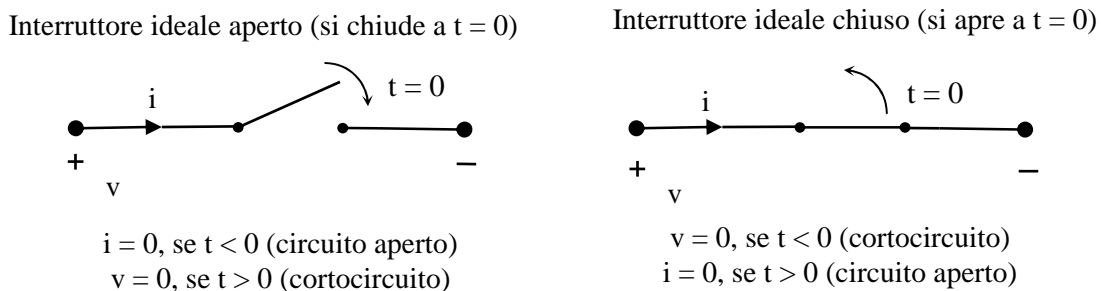


Figura 2. Interruttore ideale.

Per determinare i valori delle variabili di stato nell'istante iniziale ( $t = 0$ ), ossia nell'istante in cui si modifica la topologia del circuito e inizia il transitorio, si utilizza il **postulato di continuità dell'energia**: l'energia non può subire discontinuità nel tempo. Una discontinuità dell'energia in un intervallo di tempo infinitesimo equivarrebbe infatti all'intervento di una sorgente di potenza infinita, il che non è fisicamente accettabile. La dimostrazione del postulato è basata quindi sull'ipotesi che per ogni componente la potenza assorbita sia limitata, cioè che  $|p(t)| < p_{\max}$ ,  $\forall t$ . Infatti, conside-

<sup>(#)</sup> Può capitare che l'interruttore ideale porti a inconsistenze (ad esempio se si cerca di aprire un interruttore in serie ad un induttore percorso da corrente). In tal caso è necessario introdurre un modello circuitale dell'interruttore “reale” che tenga conto degli effetti parassiti che sono principalmente costituiti da una resistenza di contatto (in serie all'interruttore ideale), una resistenza di isolamento (in parallelo, non-lineare) e una capacità in parallelo.

rando un componente con memoria si ha  $p = dW/dt$ , dove  $W$  è l'energia immagazzinata nel componente. Integrando tale relazione (posto  $t_1 < t_2$ ) si ha:

$$W(t_1) - W(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \Rightarrow 0 \leq |W(t_1) - W(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |p(t)| dt < \int_{t_1}^{t_2} p_{\max} dt = p_{\max} |t_2 - t_1|$$

Al limite per  $t_1 \rightarrow t_0^-$  e  $t_2 \rightarrow t_0^+$  si ottiene, per il teorema del confronto:  $W(t_0^+) = W(t_0^-)$ ,  $\forall t_0$ .

Di conseguenza si ha che le variabili di stato sono funzioni continue del tempo e, in particolare, che:

- la *corrente* in un *induttore* non può subire discontinuità, ovvero  $i_L(t_0^+) = i_L(t_0^-)$ ,  $\forall t_0$ ;
- la *tensione* su un *condensatore* non può subire discontinuità, ovvero  $v_C(t_0^+) = v_C(t_0^-)$ ,  $\forall t_0$ .

Quindi, di fatto, la determinazione delle condizioni iniziali viene effettuata analizzando il circuito all'istante  $t = 0^-$ , prima che l'interruttore si apra o si chiuda. L'analisi all'istante  $t = 0^-$  è semplificata dal fatto che, solitamente, si suppone che il circuito sia a regime. [Questo consente anche di risolvere il circuito all'istante  $t = 0^+$  a partire dalla conoscenza dei valori delle variabili di stato all'istante  $t = 0^-$ , ad esempio per terminare quali sono i componenti più sollecitati nei primi istanti dopo l'apertura o la chiusura di un interruttore. A tal fine il condensatore può essere sostituito, nel circuito all'istante  $t = 0^+$ , con un generatore di tensione a tensione impressa  $v_C(t = 0^-)$  e l'induttore con un generatore di corrente a corrente impressa  $i_L(t = 0^-)$ . Il circuito equivalente che si ottiene, all'istante  $t = 0^+$ , è quindi privo di memoria.]

Si consideri ad esempio il circuito RL rappresentato nella figura 3, in cui è presente l'interruttore ideale  $T$  che si chiude istantaneamente all'istante  $t = 0$ . All'istante  $t = 0^-$ , cioè un istante prima che l'interruttore si chiuda, il circuito si trova in regime stazionario; la corrente è nulla e quindi è nulla anche la tensione ai capi dell'induttore e del resistore. Un istante dopo che l'interruttore si è chiuso ( $t = 0^+$ ) le grandezze del circuito hanno generalmente, essendo cambiata in maniera discontinua la topologia del circuito, valori diversi da quelli relativi all'istante  $t = 0^-$ . Ad esempio, la tensione ai capi della serie RL, nulla all'istante  $t = 0^-$  risulta pari ad  $E$  all'istante  $t = 0^+$ . Non risulta però cambiato il valore della corrente  $i$  (variabile di stato dell'induttore) a cui è associata l'energia  $W = \frac{1}{2} L i^2$ . Per il postulato di continuità dell'energia  $\frac{1}{2} L i^2(0^+) = W(0^+) = W(0^-) = \frac{1}{2} L i^2(0^-) = 0$ , quindi  $i(0^+) = i(0^-) = 0$ .

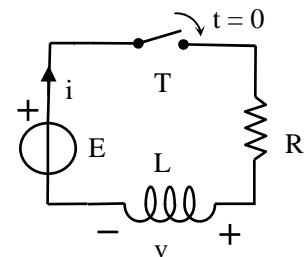


Figura 3. Circuito RL con interruttore ideale.

Come esempio di circuito del 2° ordine, si consideri il circuito rappresentato in figura 4.a, nelle condizioni definite dalla chiusura dell'interruttore  $T$ . Per calcolare le condizioni iniziali (cioè all'istante  $t = 0^+$ , immediatamente successivo alla chiusura di  $T$ ) è sufficiente considerare il circuito (a regime) prima della chiusura dell'interruttore ( $t < 0$ ).

Per  $t < 0$  (e quindi anche per  $t = 0^-$ ) si suppone che il circuito sia a regime (in questo caso stazionario, se  $E$  è costante). In questa condizione di funzionamento, mostrata in figura 4.b, è chiaro che le correnti sono tutte nulle e quindi  $i_L(0^-) = 0$ . Inoltre, dato il verso scelto per la tensione sul condensatore, si ha  $v_C(0^-) = -E$ . Utilizzando ora il postulato di continuità dell'energia è possibile affermare che  $i_L(0^+) = 0$  e che  $v_C(0^+) = -E$ .

Il sistema (8) viene quindi completato dalle condizioni iniziali e può essere risolto:

$$\begin{cases} \frac{dv_C}{dt} = -5000v_C + 2500i_L - 550000 \\ \frac{di_L}{dt} = -166v_C - 1750i_L + 18260 \\ v_C(0) = -110, \quad i_L(0) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

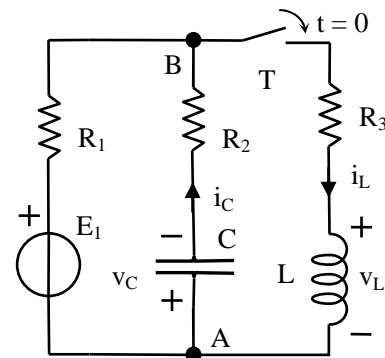


Figura 4.a

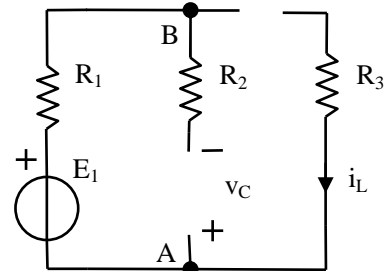


Figura 4.b – Circuito equivalente per  $t < 0$  (DC)

Indicando con  $\mathbf{x}_0$  lo stato iniziale (o condizioni iniziali) e con la notazione della (7), si ha quindi:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = [\mathbf{A}] \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (12)$$

Il sistema lineare (12) è solubile tramite vari metodi (trasformata di Laplace, esponenziale di matrici, ecc.) che portano ovviamente alla medesima soluzione. Il metodo di soluzione più semplice sfrutta la linearità delle equazioni di stato per determinare l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali lineari come la somma di un integrale particolare (soluzione di regime, se il regime esiste ovvero se il circuito è stabile) e dell'integrale generale del sistema omogeneo associato (soluzione transitoria):  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{x}_{om}(t)$ . Se il vettore degli ingressi  $\mathbf{b}$  (termine noto) è costante, per calcolare l'integrale particolare è sufficiente<sup>(\*)</sup> annullare le derivate e quindi risolvere il sistema  $[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{x}_p + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ . Per quanto riguarda l'integrale generale del sistema omogeneo associato (cioè con  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ), esso va sempre cercato nella forma di un esponenziale reale o immaginario. La sostituzione della soluzione esponenziale  $c \mathbf{u} e^{\lambda t}$  (con  $c$  e  $\lambda$  costanti scalari ed  $\mathbf{u}$  vettore costante) nel sistema omogeneo associato al (12) porta a scrivere

$$\frac{d}{dt}(c\mathbf{u}e^{\lambda t}) = [\mathbf{A}] \cdot (c\mathbf{u}e^{\lambda t}) \Rightarrow \lambda c\mathbf{u}e^{\lambda t} = [\mathbf{A}] \cdot (c\mathbf{u}e^{\lambda t}) \Rightarrow \lambda \mathbf{u} = [\mathbf{A}] \cdot \mathbf{u} \Rightarrow ([\mathbf{A}] - \lambda[\mathbf{1}]) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Quindi  $\lambda$  ed  $\mathbf{u}$  sono rispettivamente gli autovalori e gli autovettori della matrice di stato  $[\mathbf{A}]$ . L'equazione caratteristica  $\det([\mathbf{A}] - \lambda[\mathbf{1}]) = 0$  permette di determinare gli autovalori ( $[\mathbf{1}]$  è la matrice identità). Dato che  $[\mathbf{A}]$  è una matrice  $M \times M$  a coefficienti reali ( $M$  è l'ordine del circuito), il polinomio caratteristico è a coefficienti reali e di grado  $M$ . Per il teorema fondamentale dell'algebra, gli  $M$  zeri del polinomio sono quindi reali o complessi coniugati e possono essere rappresentati nella forma<sup>(\*\*)</sup>  $\lambda_k = -1/\tau_k + j \Omega_k$  con  $k = 1, \dots, M$ . Le costanti  $\tau_k$  e  $\Omega_k$  prendono il nome di costanti di tempo e pulsazioni naturali del circuito. Ammesso per semplicità che gli autovalori siano distinti<sup>(o)</sup>, la determinazione degli autovettori  $\mathbf{u}_k$  della matrice di stato permette quindi di stabilire per sovrapposizione (grazie alla linearità) l'integrale generale del sistema omogeneo associato:  $\mathbf{x}_{om}(t) = c_1 \mathbf{u}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_M \mathbf{u}_M e^{\lambda_M t}$ . Le costanti  $c_1, \dots, c_M$  possono quindi essere calcolate imponendo la condizione iniziale, ovvero  $\mathbf{x}_p(0) + \mathbf{x}_{om}(0) = \mathbf{x}_0$ , che è un sistema lineare di  $M$  equazioni nelle  $M$  incognite  $c_k$ .

Gli autovalori di  $[\mathbf{A}]$  sono particolarmente rilevanti nello studio della stabilità delle reti lineari (Un circuito si dice stabile se per ogni eccitazione limitata ha una risposta che rimane limitata). Infatti, l'integrale generale del sistema omogeneo associato mostra immediatamente che un circuito lineare è stabile se  $\Re(\lambda) \leq 0$ , per ogni  $\lambda$  autovalore della matrice di stato (in caso contrario  $\mathbf{x}_{om}(t)$

<sup>(\*)</sup> Nel caso in cui il  $\mathbf{b}$  sia funzione del tempo è necessario usare altri metodi (ad esempio il metodo della variazione delle costanti o la trasformata di Laplace). Nel caso particolare in cui le grandezze impresse dai generatori siano funzioni sinusoidali del tempo è possibile utilizzare il metodo simbolico [definito nel seguito] per determinare l'integrale particolare. Si può in ogni caso dimostrare che se  $\mathbf{b}$  è limitato (cioè sono limitate le grandezze impresse dai generatori indipendenti) anche  $\mathbf{x}_p$  è limitata.

<sup>(\*\*)</sup> Al fine di evitare possibili fraintendimenti è consuetudine in elettrotecnica, a differenza di quanto accade usualmente, indicare con la lettera "j" l'unità immaginaria ( $j^2 = -1$ ), riservando il simbolo "i" per le correnti.

<sup>(o)</sup> Si suppone quindi che tutte le soluzioni del polinomio caratteristico siano diverse fra loro, cioè sono esclusi gli autovalori multipli. Ovviamente è possibile risolvere le equazioni di stato anche nel caso in cui siano presenti autovalori multipli. Tuttavia, in pratica, gli autovalori risultano sempre distinti. La ragione intuitiva è che l'esistenza di soluzioni multiple è legata a precise condizioni tra i valori dei coefficienti del polinomio caratteristico della matrice di stato. Questi tuttavia sono ottenuti sulla base dei parametri dei componenti reali che costituiscono il circuito e sono quindi soggetti ad una tolleranza (errore relativo sul valore nominale). In effetti è possibile dimostrare che "Per ogni matrice quadrata a coefficienti reali  $a_{ij}$  esiste una matrice quadrata a coefficienti reali  $b_{ij}$  con autovalori distinti tale che  $|a_{ij} - b_{ij}| < \epsilon, \forall \epsilon > 0$  positivo e  $(\forall i, j)$ ". Ad esempio si consideri la matrice identità  $2 \times 2$ , che ha un solo autovalore doppio, pari ad 1. Se si varia di  $\epsilon$  uno dei termini sulla diagonale principale gli autovalori diventano distinti ( $1$  ed  $1 + \epsilon$ ). Allo stesso modo se si variano di  $\epsilon$  i termini sulla diagonale secondaria gli autovalori diventano distinti ( $1 \pm \epsilon$ ).

divergerebbe esponenzialmente per tempi crescenti)<sup>(\*\*\*)</sup>. Si noti che se si è interessati solo a determinare la stabilità e le costanti di tempo del circuito, è sufficiente determinare la matrice di stato [A]. Infatti gli autovalori di [A] non dipendono da **b**, ovvero dai valori assunti dalle grandezze impresse dai generatori indipendenti. È possibile quindi studiare il circuito con i generatori indipendenti spenti, ossia sostituendo ai generatori di tensione indipendenti dei cortocircuiti ed ai generatori di corrente indipendenti dei circuiti aperti. Ad esempio, se si azzerava E<sub>1</sub> nel circuito di figura 1.b si azzerava di conseguenza il vettore degli ingressi nella (6), senza che la matrice di stato cambi.

Questo tipo di analisi può essere ripetuta per ogni circuito lineare, tuttavia per circuiti di ordine superiore al secondo è necessaria la soluzione numerica del polinomio. Se si è interessati invece soltanto alla stabilità del circuito, questa analisi si può evitare per i circuiti privi di generatori pilotati. Infatti, si può dimostrare che tutti i circuiti lineari non contenenti generatori pilotati sono stabili. Per dimostrare questa affermazione è necessario mostrare che tutte le variabili circuitali restano limitate per t > 0, per ogni possibile valore (purché limitato) delle grandezze impresse dai generatori indipendenti per t > 0 e dello stato iniziale.

È immediato mostrare che la stabilità di un circuito lineare è una proprietà indipendente dai valori che assumono le grandezze impresse dai generatori indipendenti. Infatti se le equazioni di stato e lo stato iniziale per il circuito  $\mathcal{L}$  sono:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = [\mathbf{A}] \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (\mathcal{L})$$

Annullando le grandezze impresse dai generatori indipendenti si ottengono per il circuito  $\mathcal{L}'$  le stesse equazioni di stato con il vettore degli ingressi nullo:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = [\mathbf{A}] \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (\mathcal{L}')$$

In particolare la matrice di stato [A] è la stessa in entrambi i casi. Di conseguenza anche gli autovalori  $\lambda$  della matrice di stato sono gli stessi in entrambi i casi e dunque  $\Re(\lambda) \leq 0$  ( $\forall \lambda$ ) è la condizione di stabilità sia per  $\mathcal{L}$  che per  $\mathcal{L}'$ . Quindi un circuito lineare  $\mathcal{L}$  è stabile se e solo se lo stesso circuito con i generatori indipendenti spenti ( $\mathcal{L}'$ ) è stabile. La dimostrazione che il circuito lineare  $\mathcal{L}'$  è stabile è basata sui due seguenti passi:

1) L'energia immagazzinata nel circuito  $\mathcal{L}'$  è limitata, quindi le variabili di stato sono limitate.

Se si applica il teorema di Tellegen a  $\mathcal{L}'$  raggruppando i componenti per tipo (induttori, condensatori, resistori, altro<sup>(#)</sup>), si ha:

$$\sum_{\text{rami L}} v_L i_L + \sum_{\text{rami C}} v_C i_C + \sum_{\text{rami R}} v_R i_R + \sum_k v_k i_k = 0$$

trasf. ideali  
cortocircuiti  
circuiti aperti

Sostituendo le caratteristiche dei componenti e notando che trasformatori ideali, cortocircuiti e circuiti aperti assorbono potenza nulla si ha:

$$\sum_{\text{rami L}} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L i_L^2 \right) + \sum_{\text{rami C}} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} C v_C^2 \right) + \sum_{\text{rami R}} R i_R^2 = 0$$

Definendo W come la somma delle energie immagazzinate nei componenti con memoria (cioè l'energia totale nel circuito) si ha:

$$\frac{dW}{dt} = - \sum_{\text{rami R}} R i_R^2$$

<sup>(\*\*\*)</sup>Ad esempio dalla matrice di stato (34) si può determinare la stabilità e le costanti di tempo del circuito di figura 22.a:

$$0 = \det([A] - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5 \cdot 10^3 - \lambda & 2.5 \cdot 10^3 \\ -1.66 \cdot 10^2 & -1.75 \cdot 10^3 - \lambda \end{vmatrix} = (5 \cdot 10^3 + \lambda)(1.75 \cdot 10^3 + \lambda) + 4.15 \cdot 10^5$$

Sviluppando il prodotto si ottiene il polinomio di secondo grado  $\lambda^2 + 6.75 \cdot 10^3 \lambda + 9.165 \cdot 10^6 = 0$ , i cui zeri (reali) sono  $\lambda_1 = -4.86 \cdot 10^3$  e  $\lambda_2 = -1.883 \cdot 10^3$  (a cui corrispondono le costanti di tempo  $\tau_1 = 0.206$ -ms e  $\tau_2 = 0.531$ -ms). Dato che entrambi gli autovalori sono negativi, il circuito di figura 22.a è stabile.

<sup>(#)</sup> Per ipotesi sono esclusi i generatori pilotati, quindi anche gli A.O.; per ipotesi il circuito è lineare, quindi sono esclusi i componenti non lineari come il diodo; Infine in  $\mathcal{L}'$  i generatori indipendenti sono azzerati, quindi sono equivalenti a cortocircuiti (se di tensione) o circuiti aperti (se di corrente).

E integrando nel tempo si deduce (tutte le resistenze sono positive):

$$W(t) - W(0) = - \int_0^t \sum_{\text{rami R}} R i_R^2 dt \leq 0$$

Poiché  $W = \sum_{\text{rami L}} \frac{1}{2} L i_L^2 + \sum_{\text{rami C}} \frac{1}{2} C v_C^2$  è la somma di termini tutti positivi o nulli si ha  $W \geq 0$  (tutte le induttanze e le capacità sono positive) e quindi si ottiene:  $0 \leq W(t) \leq W(0)$ ,  $\forall t \geq 0$ . Essendo l'energia totale limitata anche le variabili di stato sono limitate. Si consideri infatti il primo induttore (e analogamente per tutti gli altri):

$$0 \leq \frac{1}{2} L_1 i_{L_1}^2(t) \leq \sum_{\text{rami L}} \frac{1}{2} L i_L^2(t) + \sum_{\text{rami C}} \frac{1}{2} C v_C^2(t) = W(t) \leq W(0) \Rightarrow |i_{L_1}(t)| \leq \sqrt{\frac{2W(0)}{L_1}}, \forall t \geq 0.$$

Allo stesso modo per il primo condensatore (e analogamente per tutti gli altri):

$$0 \leq \frac{1}{2} C_1 v_{C_1}^2(t) \leq \sum_{\text{rami L}} \frac{1}{2} L i_L^2(t) + \sum_{\text{rami C}} \frac{1}{2} C v_C^2(t) = W(t) \leq W(0) \Rightarrow |v_{C_1}(t)| \leq \sqrt{\frac{2W(0)}{C_1}}, \forall t \geq 0.$$

2) Dato che le variabili di stato sono limitate tutte le variabili circuitali sono limitate. Si consideri infatti il circuito che è stato utilizzato per dedurre le equazioni di stato di  $\mathcal{L}'$ : in tale circuito induttori e condensatori sono sostituiti con generatori indipendenti (di tensione e di corrente, rispettivamente) con grandezze impresse pari alle variabili di stato. Per il principio di sovrapposizione degli effetti tutte le variabili circuitali sono combinazioni lineari delle sole tensioni e correnti impresse dai generatori indipendenti. Pertanto, la corrente sul k-esimo ramo è rappresentabile come segue (e analogamente per le tensioni di ramo o di nodo):

$$i_k = \sum_{\text{(condensatori)}} g_{k,m} v_{C,m} + \sum_{\text{(induttori)}} \alpha_{k,n} i_{L,n} \Rightarrow |i_k(t)| \leq \sum_{\text{(condensatori)}} |g_{k,m}| v_{C,m}(t) + \sum_{\text{(induttori)}} |\alpha_{k,n}| i_{L,n}(t)$$

Le costanti  $g_{k,m}$  ed  $\alpha_{k,m}$  si possono ottenere, ad esempio, invertendo la matrice di Tableau e non dipendono dai valori delle induttanze e delle capacità. Considerato quindi il risultato del punto precedente, si ha infine:

$$|i_k(t)| \leq \sum_{\text{(condensatori)}} |g_{k,m}| \sqrt{\frac{2W(0)}{C_m}} + \sum_{\text{(induttori)}} |\alpha_{k,n}| \sqrt{\frac{2W(0)}{L_n}}, \forall t \geq 0, \forall k.$$

Dunque tutte le variabili circuitali di  $\mathcal{L}'$  sono limitate (e quindi  $\mathcal{L}'$  è stabile) purché l'energia totale iniziale sia finita. Questa tuttavia è una conseguenza immediata della limitatezza dello stato iniziale,

$$\text{infatti } W(0) = \sum_{\text{rami L}} \frac{1}{2} L i_L^2(0) + \sum_{\text{rami C}} \frac{1}{2} C v_C^2(0).$$

Nel seguito vengono illustrati alcuni esempi di soluzione di circuiti con memoria. Il problema che si vuole risolvere è il seguente: assegnato il circuito elettrico e le grandezze impresse dei generatori indipendenti presenti, si vuole calcolare l'andamento temporale delle correnti di ramo e delle tensioni di ramo. Si suppone per semplicità che tutti i componenti siano dei bipoli, potendosi ricondurre all'ipotesi mediante l'introduzione di circuiti equivalenti dei componenti a più di due terminali.

Si consideri, ad esempio, il circuito in figura 3, che è un circuito del 1° ordine (cioè contenente un solo elemento con memoria).

Applicando la LKT per  $t > 0$  (cioè dopo la chiusura dell'interruttore T), si ottiene:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{E - Ri}{L} \quad (13)$$

La soluzione cercata è la somma di un integrale particolare  $i_p(t)$  e dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata  $i_{om}(t)$ :  $i(t) = i_p(t) + i_{om}(t)$ . Se si assume che E sia costante, per calcolare l'integrale particolare è sufficiente annullare la derivata:  $i_p(t) = E/R$ . Per quanto riguarda l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, esso va

sempre cercato nella forma di un esponenziale reale o immaginario. La sostituzione dell'esponenziale  $e^{\lambda t}$  nella omogenea associata della (13) porta a scrivere l'equazione caratteristica:

$$\lambda = -R/L \Rightarrow i(t) = E/R + I e^{-Rt/L}$$

La determinazione della costante I può essere effettuata se è noto il valore iniziale:  $i(0^+) = i_0$ . Per calcolare tale valore iniziale è sufficiente considerare il circuito di figura 3 prima della chiusura dell'interruttore T ( $t < 0$ ). È evidente che  $i(0^-) = 0$ , visto che l'interruttore T è aperto. Utilizzando ora il postulato di continuità dell'energia è possibile affermare che  $i(0^+) = 0$ . Risulta quindi:

$$0 = E/R + I \Rightarrow I = -E/R$$

In conclusione, l'andamento temporale della corrente  $i(t)$ , mostrato in figura 5, è stato calcolato (per  $t > 0$ ) tramite la soluzione della seguente equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti con il valore iniziale di corrente nulla.

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{Ri}{L} \\ i(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

Il parametro  $\tau = L/R$  è la costante di tempo del circuito. Nell'esponenziale  $e^{-t/\tau}$  la costante di tempo  $\tau$  specifica la durata del fenomeno transitorio: dopo un tempo pari a  $5\tau$  la soluzione ha raggiunto il 99% del suo valore di regime<sup>(\*)</sup>, cioè del valore limite per  $t \rightarrow +\infty$ .

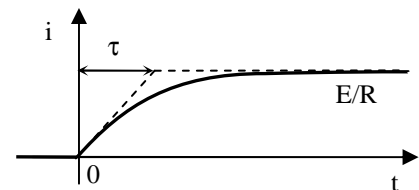


Figura 5

Si consideri ora il circuito rappresentato nella figura 6.a in cui è presente l'interruttore ideale T che si chiude istantaneamente all'istante  $t = 0$ . Per  $t > 0$  dalla LKT sulla maglia si ha:

$$E = Ri + v_C \Rightarrow i = \frac{E - v_C}{R} \Rightarrow \frac{dv_C}{dt} = \frac{E - v_C}{CR} \quad (14)$$

Dalla (14) si ottiene immediatamente l'integrale particolare:  $v_p(t) = E$ . Inoltre La sostituzione dell'esponenziale  $e^{\lambda t}$  nella omogenea associata della (14) porta a scrivere l'equazione caratteristica:

$$\lambda = -1/CR \Rightarrow v_C(t) = E + A e^{-t/CR} \quad (15)$$

dove  $\tau = CR$  è la costante di tempo del circuito. Per la determinazione della costante A si considera il valore iniziale  $v_{C,0}$  (che si mantiene uguale a  $t = 0^-$  e a  $t = 0^+$  per il postulato di continuità dell'energia) e si scrive la (15) per  $t = 0^+$ :

$$v_C(0^+) = v_{C,0} = E + A \Rightarrow v_C(t) = E + (v_{C,0} - E)e^{-t/\tau} \Rightarrow i(t) = \frac{E - v_{C,0}}{R} e^{-t/\tau} \quad (16)$$

Il grafico della (16) è mostrato in figura 6.b. Si noti che anche in questo caso per  $t > 5\tau$  si può assumere che il transitorio sia esaurito e che si sia raggiunta la soluzione di regime ( $i = 0$ ).

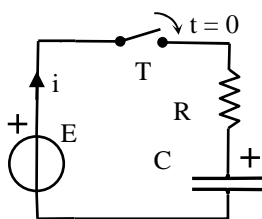


Figura 6.a

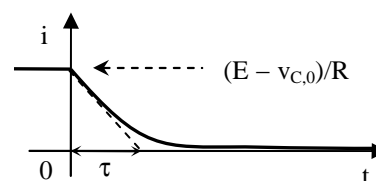


Figura 6.b

Come si è detto, i circuiti contenenti generatori pilotati non sono necessariamente stabili. A titolo di esempio si consideri il circuito di figura 7.a, in cui l'interruttore T si chiude all'istante  $t = 0$  e si riapre all'istante  $t = t_0$ . Si suppone che il circuito sia a regime (DC) per  $t < 0$ .

L'andamento temporale della corrente  $i$ , per  $0 \leq t \leq t_0$ , è calcolabile risolvendo il seguente sistema, con il valore iniziale di corrente nulla (supponendo  $k \neq R_1 + R_2$ ).

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \frac{E - R_1 i}{L} \\ i(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R_1} \left( 1 - e^{-\frac{R_1}{L}t} \right) \quad (17)$$

$$E + R_2(i - i_E) - ki = 0$$

<sup>(\*)</sup> Lo stesso ragionamento è applicabile ad ognuno degli esponenziali della soluzione transitoria di un circuito lineare di ordine qualsiasi, purché stabile. Dato che ogni esponenziale decade con la sua costante di tempo, il regime si considera raggiunto per  $t > 5\tau_{\max}$ , dove  $\tau_{\max}$  è la maggiore delle costanti di tempo.



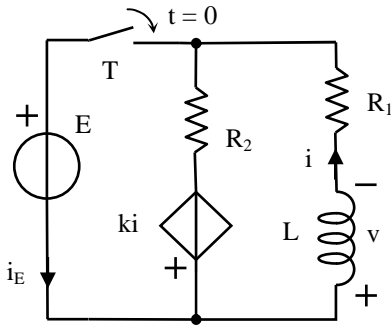


Figura 7.a

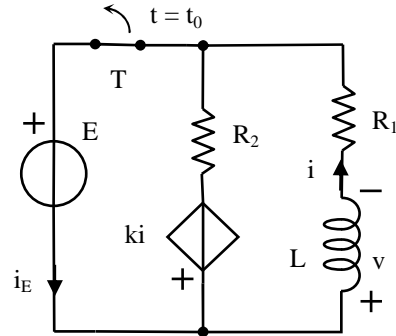


Figura 7.b

L'andamento temporale della corrente  $i$ , per  $t \geq t_0$ , è calcolabile risolvendo il seguente sistema, con il valore iniziale di corrente  $i_0 = i(t_0^+) = i(t_0^-)$  deducibile dalla (17):

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\frac{(R_1 + R_2 - k)}{L}i \\ i(t_0) = i_0 \end{cases} \Rightarrow i(t) = i_0 e^{\frac{k - R_1 - R_2}{L}(t - t_0)} \quad (18)$$

La (18) mostra che il circuito è stabile solo se  $k \leq R_1 + R_2$ . Nel caso contrario la corrente  $i$  cresce esponenzialmente. Pertanto, se il circuito di figura 7 rappresenta il modello un dispositivo fisico, al crescere della  $i$  si raggiungeranno i limiti operativi del dispositivo (che si guasterà), oppure si raggiungeranno i limiti del modello lineare e sarà necessario modificare la struttura del circuito.

Come caso limite di stabilità, si consideri il circuito del 2° ordine illustrato in figura 8. Per  $t < 0$  (DC), si ha:  $i = i_L = E/R$ ,  $i_C = 0$ ,  $v_L = v_C = 0$ . Dopo l'apertura dell'interruttore T, per  $t > 0$ , il circuito è costituito dal parallelo dell'induttore con il condensatore.

Pertanto,  $v_L = -v_C$ ,  $i_C = i_L$  e l'equazione di stato è data da:

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} \quad (19)$$

con le condizioni iniziali  $v_C(0) = 0$ ,  $i_L(0) = E/R$ .

Da  $\det([A] - \lambda[1]) = 0$  si ottiene quindi  $\lambda^2 + 1/LC = 0$ . Posto  $\omega_0^2 = 1/LC$ , si ottengono le due radici, puramente immaginarie,  $\lambda = \pm j \omega_0$ . Si noti quindi che  $\Re(\lambda) = 0$  e dunque le variabili di stato non tendono a zero, né divergono, ma sono oscillanti.

Per determinare la soluzione si noti intanto che la soluzione particolare è nulla. Per determinare la soluzione dell'omogenea associata alla (19) (che coincide con l'equazione stessa) si calcolano gli autovettori corrispondenti agli autovalori, risolvendo  $([A] - \lambda[1]) \mathbf{u} = 0$ .

Per l'autovettore  $\mathbf{u}_1$  corrispondente all'autovalore  $\lambda_1 = +j \omega_0$  si ha:

$$\begin{bmatrix} -j\omega_0 & 1/C \\ -1/L & -j\omega_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Le due righe della matrice sono proporzionali (il determinante è nullo) quindi, considerando la prima riga, si può porre  $u_{1,1} = 1$  ed  $u_{1,2} = j \omega_0 C$  (o una qualunque altra coppia proporzionale a questa). Analogamente, per il secondo autovettore si ottiene  $u_{2,1} = 1$  ed  $u_{2,2} = -j \omega_0 C$ .

Indicando con  $k_1$  e  $k_2$  le costanti di integrazione si ha quindi:

$$\begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} = k_1 \mathbf{u}_1 e^{j\omega_0 t} + k_2 \mathbf{u}_2 e^{-j\omega_0 t} = \begin{Bmatrix} k_1 e^{j\omega_0 t} + k_2 e^{-j\omega_0 t} \\ k_1 j\omega_0 C e^{j\omega_0 t} - k_2 j\omega_0 C e^{-j\omega_0 t} \end{Bmatrix}$$

Per determinare la costanti di integrazione si utilizzano le condizioni iniziali all'istante  $t = 0$  ( $e^0 = 1$ ):

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ E/R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 + k_2 \\ k_1 j\omega_0 C - k_2 j\omega_0 C \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} k_1 = E/(2j\omega_0 CR) \\ k_2 = -E/(2j\omega_0 CR) \end{Bmatrix}$$

Sostituendo si ha quindi:

$$\begin{cases} v_C(t) = \frac{E}{2j\omega_0 CR} e^{j\omega_0 t} - \frac{E}{2j\omega_0 CR} e^{-j\omega_0 t} = \frac{E}{\omega_0 CR} \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \\ i_L(t) = \frac{E}{2R} e^{j\omega_0 t} + \frac{E}{2R} e^{-j\omega_0 t} = \frac{E}{R} \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \end{cases}$$

Si riconoscono infine le definizioni delle funzioni  $sen()$  e  $cos()$  in campo complesso (oppure si può procedere sostituendo l'identità di Eulero,  $e^{jx} = cos(x) + j sen(x)$ ) e si ottiene la soluzione:  $i_L(t) = \frac{E}{R} cos(\omega_0 t)$ ,  $v_C(t) = \frac{E}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} sin(\omega_0 t)$ .

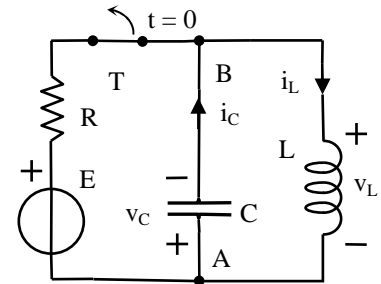


Figura 8

Nel circuito si instaura quindi un regime periodico con un periodo  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , ovvero un regime sinusoidale<sup>(o)</sup> alla frequenza  $f_0 = 1/T_0 = \omega_0/2\pi$ . In pratica tuttavia induttori e condensatori reali hanno sempre effetti parassiti dissipativi (tipicamente l'induttore reale è una serie R-L ed il condensatore reale un parallelo R-C) che attenuano esponenzialmente le oscillazioni, portando a zero le variabili di stato.

I circuiti in fase transitoria possono essere utilizzati per generare valori di tensione o di corrente molto maggiori di quelli ottenibili a regime dallo stesso circuito.

A titolo di esempio applicativo si consideri il circuito di accensione "classico" per un motore a combustione interna a benzina, mostrato in figura. Il problema in questo caso è generare tra gli elettrodi della candela (posta nella camera di combustione) una tensione sufficientemente elevata da innescare la scarica ("scintilla") nella miscela aria-benzina (almeno 12 kV) pur avendo a disposizione un generatore a tensione impressa molto minore (batteria da 12 V). La miscela si può considerare come un materiale elettricamente isolante fino alla tensione di scarica (corrente nulla, quindi un circuito aperto). Oltre quel valore permette il passaggio della corrente e si può rappresentare come un resistore non-lineare.

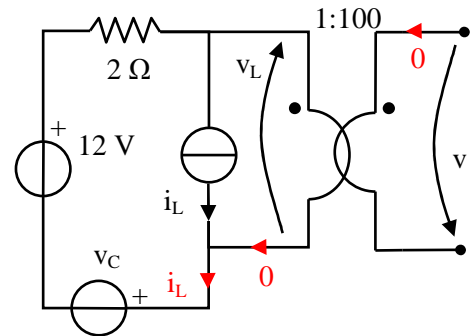
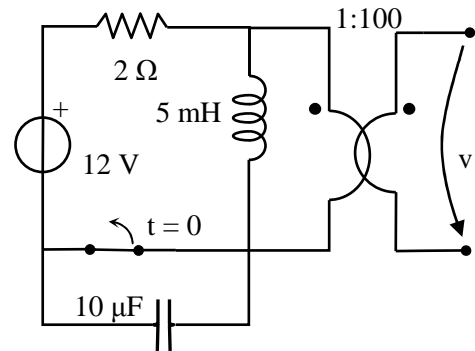
Il circuito illustrato in figura basa il suo funzionamento su una induttanza (avvolgimento primario della bobina d'accensione) che, quando è collegata al generatore (interruttore chiuso) raggiunge il regime stazionario entro qualche millisecondo (a regime la tensione sull'induttore è nulla, mentre la corrente raggiunge un valore di qualche Ampere. Quando è necessario generare la scintilla, la bobina primaria viene scollegata dalla batteria (aprendo l'interruttore) e posta in serie al condensatore. La tensione ai terminali dell'induttanza raggiunge rapidamente un valore di qualche centinaio di Volt. La tensione tra gli elettrodi della candela (i terminali del secondario del trasformatore, dimensionato con un rapporto di trasformazione di circa 100) cresce quindi fino a qualche decina di kiloVolt, sufficiente a generare la scintilla in camera di combustione e l'accensione della miscela. Dopo la scarica l'interruttore è richiuso, causando la scarica rapida del condensatore (istantanea se si considera l'interruttore chiuso equivalente a un cortocircuito, la costante di tempo dipende dalla resistenza parassita sulla maglia formata dal condensatore e dall'interruttore) ed il ripristino della corrente di regime sull'induttore. Questa analisi qualitativa del circuito di accensione mostra come ciò che interessa è determinare il valore massimo della tensione  $v$  e l'istante di tempo in cui questo si verifica.

Per  $t > 0$  l'interruttore è aperto. Le caratteristiche dell'induttore e del condensatore, in cui sono esplicitate le derivate delle variabili di stato, sono:

$$di_L/dt = v_L/L = 200 v_L$$

$$dv_C/dt = i_C/C = 10^5 i_C$$

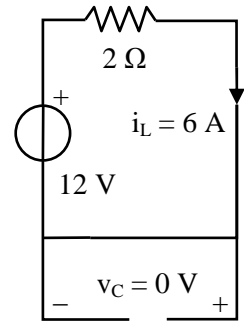
Supponendo (formalmente) note le variabili di stato, il condensatore può essere sostituito, nel circuito, con un generatore di tensione a tensione impressa  $v_C$  e l'induttore con un generatore di corrente a corrente impressa  $i_L$ . Il secondario del trasformatore è collegato ad un circuito aperto (corrente nulla) quindi anche la corrente sul primario è nulla. Applicando la LKC a uno dei terminali dell'induttore, si deduce che  $i_C = i_L$ . Inoltre, si ha  $v = -100 v_L$  (il segno è dovuto alla scelta del verso di  $v$ ).



<sup>(o)</sup> Un circuito è in regime sinusoidale (o regime AC "Alternating Current" o in corrente alternata) se tutte le variabili circuitali sono grandezze sinusoidali del tempo con lo stesso periodo (o la stessa frequenza). Se in un circuito lineare stabile le grandezze impresse dai generatori indipendenti presenti sono funzioni sinusoidali isofrequenziali del tempo, dopo un transitorio di durata dipendente dai parametri del circuito stesso, si raggiunge una soluzione di regime AC in cui tutte le grandezze del circuito sono funzioni sinusoidali isofrequenziali del tempo, con frequenza pari a quella dei generatori. Infatti, ammesso che la soluzione transitoria si annulli (quindi  $\Re(\lambda) < 0, \forall \lambda$  autovalore di  $[A]$ ), questo significa mostrare che, se il vettore degli ingressi è sinusoidale, anche la soluzione particolare (che quindi è la soluzione di regime) è sinusoidale. A tal fine è sufficiente supporre  $\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}_1 \cos(\omega t) + \mathbf{b}_2 \sin(\omega t)$ , sostituire nelle equazioni di stato, e cercare una soluzione particolare nella forma  $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{x}_1 \cos(\omega t) + \mathbf{x}_2 \sin(\omega t)$ . Raggruppando i termini in  $\sin(\omega t)$  e  $\cos(\omega t)$  e annullandone i coefficienti (dato che sono funzioni indipendenti) si perviene a un sistema lineare che è solubile solo se il determinante della matrice dei coefficienti ( $[A]^2 + \omega^2[1]$ ) è non nullo. Indicando con  $j$  l'unità immaginaria ( $j^2 = -1$ ) si ha tuttavia  $\det([A]^2 + \omega^2[1]) = \det([A] + j\omega[1]) \cdot \det([A] - j\omega[1])$  e quindi il determinante è nullo solo se almeno uno degli autovalori della matrice di stato coincide con  $\pm j\omega$ , ma questo è impossibile grazie all'ipotesi  $\Re(\lambda) < 0, \forall \lambda$ .

Per determinare  $v_L$  è sufficiente applicare la LKT sulla maglia a primario per ottenere:  $0 = v_L + v_C - 12 + 2i_L$ . (e quindi  $v_L = -2i_L - v_C + 12$ ). Infine, sostituendo nelle caratteristiche dell'induttore e del condensatore si ottengono le equazioni di stato:

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} i_L \\ v_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -400 & -200 \\ 10^5 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_L \\ v_C \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2400 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Le condizioni iniziali si determinano studiando il circuito per  $t = 0^-$  (in regime DC). In questa condizione di funzionamento (interruttore chiuso, induttore equivalente ad un cortocircuito, condensatore equivalente ad un circuito aperto), che è mostrata in figura, è chiaro che  $i_L(0^-) = 6$  ed  $v_C(0^-) = 0$ . Utilizzando il postulato di continuità dell'energia si ha quindi  $i_L(0^+) = 6$  ed  $v_C(0^+) = 0$ .

Dato che il termine noto è costante, la soluzione particolare è costante. Annullando le derivate si ha:  $i_{L,p} = 0$  A e  $v_{C,p} = 12$  V. Gli autovalori della matrice di stato si ottengono dagli zeri del polinomio caratteristico  $(400 + \lambda)\lambda + 2 \times 10^7 = 0$ , per cui  $\lambda_1 = -200 + 4472j$  ed  $\lambda_2 = -200 - 4472j$ . Gli autovalori sono complessi coniugati (si ha quindi una sola costante di tempo,  $\tau = 1/200 = 5$  ms) e la soluzione sarà oscillante. Gli autovettori corrispondenti sono  $\mathbf{u}_1 = \{\lambda_1, 10^5\}^T$  ed  $\mathbf{u}_2 = \{\lambda_2, 10^5\}^T$ .

Indicando con  $k_1$  e  $k_2$  le costanti di integrazione si ha quindi:

$$\begin{Bmatrix} i_L \\ v_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i_{L,p} \\ v_{C,p} \end{Bmatrix} + k_1 \mathbf{u}_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 \mathbf{u}_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{Bmatrix} k_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \\ 12 + k_1 10^5 e^{\lambda_1 t} + k_2 10^5 e^{\lambda_2 t} \end{Bmatrix}$$

Per determinare la costanti di integrazione si utilizzano le condizioni iniziali in  $t = 0$ :

$$\begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 \\ 12 + k_1 10^5 + k_2 10^5 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} k_1 = -6 \times 10^{-5} - j6.681 \times 10^{-4} \\ k_2 = -6 \times 10^{-5} + j6.681 \times 10^{-4} \end{Bmatrix}$$

Sostituendo (e utilizzando l'identità di Eulero,  $e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$ ) si ottiene la soluzione (valida per  $t > 0$ ):

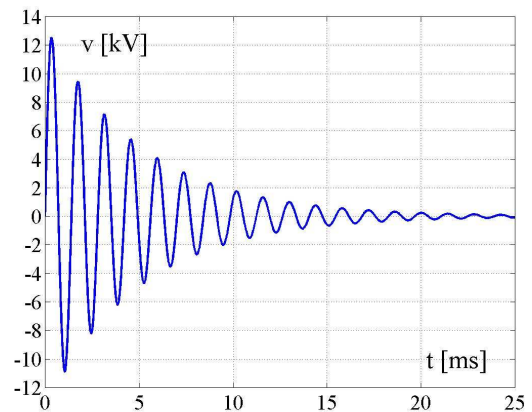
$$\begin{Bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6e^{-200t} \cos(4472t) + 0.2683e^{-200t} \sin(4472t) \\ 12 - 12e^{-200t} \cos(4472t) + 133.9e^{-200t} \sin(4472t) \end{Bmatrix}$$

Infine  $v = -100 v_L = 200 i_L + 100 v_C - 1200$

E dunque (per  $t > 0$ ) si ha:

$$v(t) = 13443 e^{-200t} \sin(4472t) \quad [\text{V}]$$

Come mostrato a lato  $v(t)$  ha un andamento oscillante smorzato. Le posizioni dei massimi e dei minimi si ottengono risolvendo  $dv/dt = 0$ . Tuttavia poiché  $4472 \gg 200$  si può assumere che il primo massimo coincida circa con il primo massimo del seno, ovvero per  $4472t \cong \pi/2$ . Quindi all'istante  $0.35$  ms si ha  $v_{\max} \cong 12.5$  kV. La soluzione trovata è ovviamente valida sino a quando non si innesca la scarica; per tempi maggiori, il circuito, le equazioni di stato e la loro soluzione sono differenti.



Anche i circuiti instabili possono essere utilizzati praticamente; in tal caso la stabilità del funzionamento del dispositivo deve essere garantita con altri mezzi.

Ad esempio si consideri l'oscillatore<sup>(#)</sup> di Wien mostrato in figura. Si vuole determinare l'andamento nel tempo della tensione  $v_o$ , e determinare in quali condizioni questa è sinusoidale e il circuito è stabile.

Per determinare le equazioni di stato si sostituisce il circuito equivalente dell'A.O. nella regione lineare e si introducono le variabili di stato  $v_{C1}$  e  $v_{C2}$ . Con i versi indicati in figura le caratteristiche dei condensatori sono quindi:

$$\begin{aligned} dv_{C1}/dt &= i_1/C \\ dv_{C2}/dt &= i_2/C \end{aligned}$$

Le tensioni sui resistori in basso sono (formalmente) note e quindi dalle loro caratteristiche si deducono le correnti, come indicato. Dalla LKC applicata al nodo A si deduce inoltre la corrente  $i_1$ :  $i_1 = i_2 - v_{C1}/R$ . E infine dalla LKT[AA'BA] si ottiene:  $0 = -R_2(v_{C1}/R_1) + R i_2 + v_{C2} \Rightarrow i_2 = (R_2/R_1)(v_{C1}/R) - (v_{C2}/R)$

Sostituendo nelle caratteristiche si ottengono quindi le equazioni di stato. Posto  $\omega = 1/CR$ , si ha:

<sup>(#)</sup> Con il termine oscillatore si intende un circuito in grado di generare una tensione sinusoidale (o, più in generale, una forma d'onda periodica a frequenza assegnata) senza un segnale di ingresso. Come bipolo è equivalente ad un generatore di tensione indipendente.

$$\begin{cases} \frac{dv_{C1}}{dt} = \left( \frac{R_2}{R_1} - 1 \right) \omega v_{C1} - \omega v_{C2} \\ \frac{dv_{C2}}{dt} = \frac{R_2}{R_1} \omega v_{C1} - \omega v_{C2} \end{cases}$$

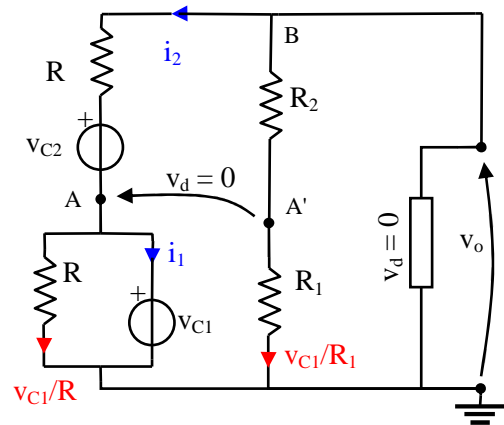
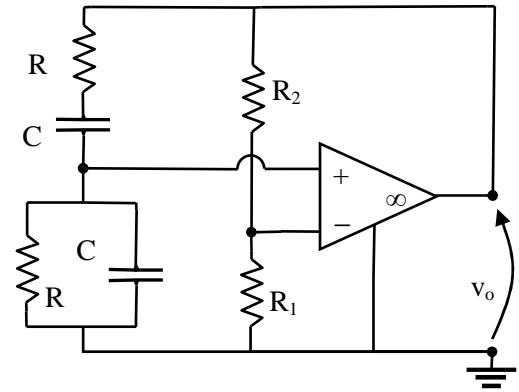
Gli autovalori della matrice di stato si ottengono dagli zeri del polinomio  $(\omega + \lambda) (\lambda - \omega(R_2/R_1 - 1)) + \omega^2 (R_2/R_1) = 0$ , per cui  $\lambda_{1,2} = \omega (R_2/2R_1 - 1) \pm j\omega \sqrt{((R_2/2R_1)^2 - (R_2/R_1))}$ . Gli autovalori sono complessi coniugati e la soluzione è oscillante. Se  $\Re(\lambda_{1,2}) < 0$ , cioè se  $R_1 > R_2/2$ , il circuito è stabile quindi tutte le variabili circuitali convergono (oscillando) a zero<sup>(##)</sup>. Viceversa, se  $\Re(\lambda_{1,2}) > 0$ , cioè se  $R_1 < R_2/2$ , il circuito è instabile quindi tutte le variabili circuitali divergono (oscillando). Entrambe le situazioni sono indesiderabili: la prima perché è inutile, la seconda perché porta certamente a rottura (quando si superano i limiti operativi dei componenti). Per ottenere una soluzione oscillante permanente è quindi necessario che  $\Re(\lambda_{1,2}) = 0$  cioè  $R_1 = R_2/2$ .

Analizziamo quindi il circuito supponendo  $R_1 = R_2/2$  (vedremo nel seguito come è possibile realizzare questa condizione). In tale condizione le equazioni di stato diventano  $dv_{C1}/dt = \omega v_{C1} - \omega v_{C2}$ ,  $dv_{C2}/dt = 2\omega v_{C1} - \omega v_{C2}$ . Inoltre  $v_o = (R_2 + R_1) (v_{C1}/R_1) = 3 v_{C1}$ . Per determinare l'equazione relativa a  $v_o$  si esprime  $v_{C2}$  in funzione di  $v_{C1}$  e della sua derivata dalla prima equazione di stato ( $v_{C2} = v_{C1} - (1/\omega) dv_{C1}/dt$ ), e si sostituisce nella seconda ( $dv_{C1}/dt - (1/\omega) d^2v_{C1}/dt^2 = 2\omega v_{C1} - \omega v_{C1} + dv_{C1}/dt$ ). Semplificando e moltiplicando per 3, si ottiene  $d^2v_o/dt^2 + \omega^2 v_o = 0$ . L'integrale generale di questa equazione è, come richiesto, una grandezza sinusoidale<sup>(###)</sup>:  $v_o(t) = V_{oM} \cos(\omega t + \alpha_o)$ .

La stabilità del funzionamento si può ottenere utilizzando una termo-resistenza  $R_1(T)$  (o termistore, cioè una resistenza fortemente dipendente dalla temperatura  $T$  del resistore) con  $dR_1/dT > 0$ . La temperatura della termo-resistenza è definita da un bilancio di potenza termica sul componente (energia termica accumulata per unità di tempo uguale alla differenza tra potenza elettrica dissipata e potenza ceduta all'ambiente esterno) e la potenza media  $P_1$  dissipata in regime sinusoidale sul resistore  $R_1$  è proporzionale al valor medio di  $v_{C1}^2$ , cioè a  $V_{oM}^2$  [vedi seguito] Si assuma quindi di essere in condizioni stazionarie con  $T = T_e = \text{costante}$ ,  $V_{oM} = V_{oM,e} = \text{costante}$ , ed  $R_1(T_e) = R_2/2 = \text{costante}$ . Se, per una ragione qualsiasi, si ha una perturbazione nel funzionamento del circuito per cui  $V_{oM} > V_{oM,e}$ , la potenza  $P_1$  cresce e quindi anche la temperatura la termo-resistenza cresce:  $T > T_e$ . Anche  $R_1$  cresce e quindi si ha  $R_1 > R_2/2$ , e la parte reale degli autovalori diventa negativa. La tensione  $v_o(t)$  viene smorzata dal fattore esponenziale  $\exp[\omega (R_2/2R_1 - 1)]$  e dunque  $V_{oM}$  si riduce. Viceversa, se si ha una perturbazione nel funzionamento del circuito per cui  $V_{oM} < V_{oM,e}$ , la potenza  $P_1$  cala e quindi anche la temperatura la termo-resistenza cala:  $T < T_e$ . Anche  $R_1$  cala e quindi si ha  $R_1 < R_2/2$ , e la parte reale degli autovalori diventa positiva. La tensione  $v_o(t)$  viene amplificata dal fattore esponenziale  $\exp[\omega (R_2/2R_1 - 1)]$  e dunque  $V_{oM}$  aumenta. Questa analisi qualitativa della stabilità del funzionamento a regime mostra anche come si avvia il circuito: all'avviamento (quando si attiva il circuito di polarizzazione dell'A.O.) si ha  $T < T_e$  quindi il circuito è instabile ed è sufficiente una perturbazione qualsiasi (ad esempio dovuta al rumore termico) per ottenere una tensione oscillante ed esponenzialmente divergente. La potenza  $P_1$  cresce e quindi anche la temperatura la termo-resistenza cresce fino a quando non si raggiunge la condizione di regime  $R_1 = R_2/2$ .

## 2. CALCOLO DELLE COSTANTI DI TEMPO (PER I CIRCUITI DEL PRIMO E DEL SECONDO ORDINE)

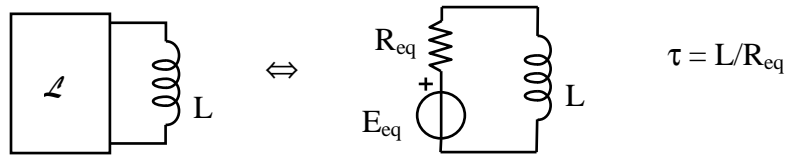
Negli esempi precedenti si era interessati alla determinazione delle tensioni e delle correnti nei circuiti in funzione del tempo. Più spesso tuttavia si è interessati solo al calcolo delle costanti di tempo (ovvero alla stabilità del circuito). In tal caso, per i circuiti del primo ordine si possono utilizzare i teoremi di Thevenin e Norton come segue. Nel caso in cui un induttore  $L$  sia connesso al bi-



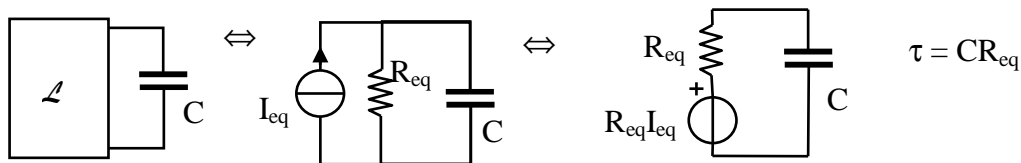
<sup>(##)</sup> Il termine noto è nullo dato che ci sono generatori indipendenti nel circuito. Pertanto la soluzione particolare (che coincide con quella di regime) è nulla, come si verifica immediatamente.

<sup>(###)</sup> La fase  $\alpha_o$  è irrilevante per il funzionamento dell'oscillatore (in effetti, scegliendo opportunamente l'origine dei tempi, si può sempre annullare). Il valore dell'ampiezza è determinato dal un bilancio di potenza sul circuito; infatti la potenza dissipata sui resistori deve essere erogata dall'A.O. ovvero dal suo circuito di polarizzazione.

polo lineare  $\mathcal{L}$  (che si suppone controllato in corrente) l'applicazione del teorema di Thevenin (al bipolo  $\mathcal{L}$ ) porta ad un circuito costituito dalla serie del generatore indipendente di tensione equivalente, della resistenza equivalente e dell'induttore. Come si è già visto, la costante di tempo di questo circuito è  $\tau = L/R_{eq}$ . Si noti che non è necessario calcolare la  $E_{eq}$ .



La medesima procedura è applicabile anche nel caso in cui un condensatore  $C$  sia connesso al bipolo lineare  $\mathcal{L}$  (che si suppone controllato in tensione) l'applicazione del teorema di Norton (al bipolo  $\mathcal{L}$ ) porta ad un circuito costituito dal parallelo del generatore indipendente di corrente equivalente, della resistenza equivalente e del condensatore. Utilizzando la nota equivalenza tra generatori reali si ottiene un circuito già analizzato, la cui costante di tempo è  $\tau = CR_{eq}$ . Si noti che comunque non è necessario calcolare la  $I_{eq}$ .



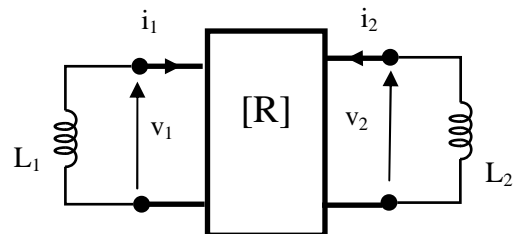
Nel caso dei circuiti lineari del secondo ordine si possono invece utilizzare le rappresentazioni dei doppi bipoli complementari agli elementi con memoria. Ad esempio, si consideri un circuito lineare contenente due induttori. Le grandezze impresse dai generatori indipendenti nel circuito possono essere annullate, dato che non influenzano la matrice di stato. Pertanto, il doppio bipolo collegato agli induttori è lineare e omogeneo. Rappresentandolo tramite matrice di resistenze, la determinazione della matrice di stato è immediata:

Infatti:

$$\begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = -[R] \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix}$$

E quindi

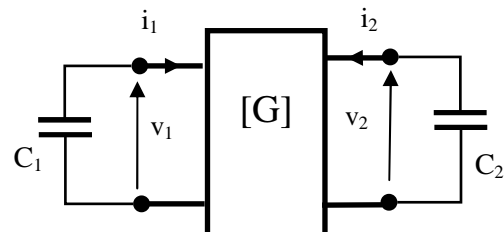
$$[A] = - \begin{bmatrix} 1/L_1 & 0 \\ 0 & 1/L_2 \end{bmatrix} [R]$$



La soluzione del polinomio di secondo grado  $\det([A] - \lambda[1]) = 0$  permette quindi di determinare gli autovalori ( $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ) e le costanti di tempo ( $\tau_1$  e  $\tau_2$ ) utilizzando la relazione  $\lambda_{1,2} = -1/\tau_{1,2} + j \Omega_{1,2}$ . Analogamente, nel caso in cui si abbiano due condensatori o un induttore ed un condensatore, si possono utilizzare le rappresentazioni tramite matrice di conduttanze o ibrida, rispettivamente.

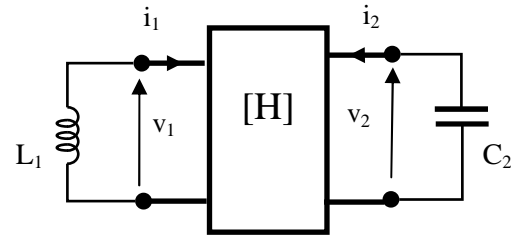
$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} = -[G] \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

$$[A] = - \begin{bmatrix} 1/C_1 & 0 \\ 0 & 1/C_2 \end{bmatrix} [G]$$



$$\begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} = -[H] \begin{Bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

$$[A] = - \begin{bmatrix} 1/L_1 & 0 \\ 0 & 1/C_2 \end{bmatrix} [H]$$



### 3. SOLUZIONE NUMERICA DELLE EQUAZIONI DI STATO CON I METODI DI EULERO

Come si è visto è possibile descrivere un circuito con memoria tramite equazioni di stato. Se il circuito è lineare (cioè contiene solo componenti lineari e generatori indipendenti) le equazioni di stato sono lineari nella forma (12), con la matrice di stato costante ed il termine noto che può essere dipendente dal tempo. Se il circuito è non-lineare l'equazione di stato è non lineare e si può sempre rappresentare come:

Il sistema (20) è detto Problema di Cauchy per sistemi di equazioni differenziali ordinarie e rappresenta un problema di grande rilevanza applicativa in tutti i settori dell'ingegneria. Infatti, a tale problema sono riconducibili molti sistemi dinamici (ad esempio, oltre ai circuiti, anche i dispositivi meccanici).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (20)$$

Supponendo che  $f(t, x)$  sia continua rispetto a entrambi gli argomenti e con derivata (rispetto al secondo argomento) limitata, è possibile dimostrare l'esistenza di una soluzione della (20) continua e con derivata continua.

Per risolvere numericamente la (20) sono stati sviluppati numerosi metodi. Tra i più usati vi sono i metodi Eulero, in cui l'equazione differenziale viene approssimata rimpiazzando la derivata  $dx/dt$  con un rapporto incrementale calcolato tra nodi di una griglia di passo  $\Delta t$  (che di solito si assume costante):  $t_n = n \Delta t$  ( $n = 0, 1, 2 \dots$ ). In corrispondenza di  $t_n$ , la soluzione numerica assume il valore  $x_n$  che intende approssimare il valore  $x(t_n)$  della soluzione. Il modo più semplice di approssimare la derivata è tramite il rapporto incrementale tra i due nodi  $t_n$  e  $t_{n+1}$ :  $dx/dt \cong (x(t_{n+1}) - x(t_n))/\Delta t$ . Tale approssimazione equivale a calcolare  $x(t_{n+1})$  da  $x(t_n)$  tramite lo sviluppo di Taylor di primo ordine centrato in  $t_n$ :  $x(t_{n+1}) = x(t_n) + \Delta t f(t_n, x(t_n))$ . Dato che  $x_0$  è noto, possiamo definire una soluzione numerica sulla base di questa relazione di ricorrenza:

$$\text{Metodo di Eulero esplicito: } x_{n+1} = x_n + \Delta t f(t_n, x_n) \quad (21)$$

Utilizzando la (21) è possibile calcolare le  $x_n$  per  $n$  crescenti:  $x_{n+1}$  è definito in modo esplicito a partire dalle grandezze calcolate al passo  $n$ -esimo. La derivata  $dx/dt$  si può però approssimare anche con il rapporto incrementale (a sinistra) tra i due nodi  $t_n$  e  $t_{n+1}$ . Tale approssimazione lega  $x(t_{n+1})$  a  $x(t_n)$  tramite lo sviluppo di Taylor di primo ordine centrato in  $t_{n+1}$ :  $x(t_n) = x(t_{n+1}) - \Delta t f(t_{n+1}, x(t_{n+1}))$ . Dato che  $x_0$  è noto, possiamo definire una soluzione numerica sulla base di questa relazione di ricorrenza:

$$\text{Metodo di Eulero implicito: } x_{n+1} = x_n + \Delta t f(t_n, x_{n+1}) \quad (22)$$

Utilizzando la (22), per  $n$  crescenti,  $x_{n+1}$  è definito in modo implicito (come soluzione di una equazione) a partire dalle grandezze calcolate al passo  $n$ -esimo.

Per confrontare il comportamento dei due metodi, consideriamo il problema scalare lineare a destra, la cui soluzione esatta è  $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ . Supponendo  $\lambda < 0$  la soluzione esatta tende quindi a zero per  $t$  crescente.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Confrontiamo i due metodi di Eulero in termini di convergenza alla soluzione esatta, e di conservazione della proprietà qualitativa di stabilità delle soluzioni. Per il metodo di Eulero esplicito, si ha  $x_{n+1} = x_n + \Delta t \lambda x_n$  e quindi  $x_{n+1} = (1 + \Delta t \lambda) x_n$  la cui soluzione è data da  $x_n = (1 + \Delta t \lambda)^n x_0$ . Per il

metodo di Eulero implicito, si ha invece  $x_{n+1} = x_n + \Delta t \lambda x_{n+1}$  e quindi  $x_{n+1} = x_n / (1 - \Delta t \lambda)$  la cui soluzione è data da  $x_n = x_0 / (1 - \Delta t \lambda)^n$ . Ponendo  $\Delta t = \underline{t}/n$  (con  $\underline{t}$  fissato), e per  $n \rightarrow \infty$  in entrambi i casi si ha convergenza al valore esatto:

$$\text{Metodo di Eulero esplicito: } x(\underline{t}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\lambda \underline{t}}{n} \right)^n x_0 = e^{\lambda \underline{t}} x_0$$

$$\text{Metodo di Eulero implicito: } x(\underline{t}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{\lambda \underline{t}}{n} \right)^{-n} x_0 = e^{\lambda \underline{t}} x_0$$

Tuttavia, affinché le soluzioni numeriche convergano a zero per  $n \rightarrow \infty$ , (con  $\lambda < 0$  e  $\Delta t > 0$  fissato), è necessario:

- Per il metodo di Eulero esplicito, che  $|1 + \Delta t \lambda| < 1$ , cioè  $\Delta t < 2/|\lambda|$
- Per il metodo di Eulero implicito, che  $1/|1 - \Delta t \lambda| < 1$ , e questa relazione è sempre soddisfatta.

Quindi, il metodo di Eulero implicito conserva anche nel discreto la stabilità delle soluzioni, mentre per il metodo esplicito questo accade solo se  $\Delta t$  è sufficientemente piccolo (in caso contrario la soluzione numerica diverge al crescere di  $n$ ). Tale proprietà di conservare nel problema discreto la stabilità del problema continuo si dice *stabilità assoluta* (o *stabilità numerica*).

Procedendo come finora descritto si discretizzano direttamente le equazioni di stato. Si può tuttavia effettuare l'analisi di un circuito con memoria procedendo a discretizzarlo direttamente. Questo è possibile perché il sistema risolvibile si ottiene utilizzando le Leggi di Kirchhoff, che sono valide in ogni istante di tempo, e le relazioni costitutive degli elementi privi di memoria pongono in relazione i valori istantanei delle variabili circuitali. Le caratteristiche differenziali dei componenti con memoria vengono invece trasformate in relazioni algebriche tra le valori istantanei delle variabili circuitali in istanti diversi secondo il seguente schema (seguendo il metodo di Eulero implicito).

### Induttore

L'induttore lineare ha come caratteristica nel dominio del tempo: 
$$v(t) = L \frac{d}{dt} i(t) \quad (23)$$

Utilizzando il metodo di Eulero implicito, la (23) si discretizza come segue:

$$v_{n+1} = (L/\Delta t) i_{n+1} - (L i_n/\Delta t) \quad (24)$$

ove  $\Delta t$  indica il passo temporale (costante). Al tempo  $t = t_{n+1}$  il circuito equivalente dell'induttore si indica quindi come in figura 9.b, specificando il valore di resistenza  $L/\Delta t$  e la tensione impressa  $L i_n/\Delta t$  (che si suppone nota, dato che  $i_n$  è la corrente al tempo  $t_n$ ), e sostituendo le variabili circuitali con i rispettivi simboli al tempo  $t = t_{n+1}$ .

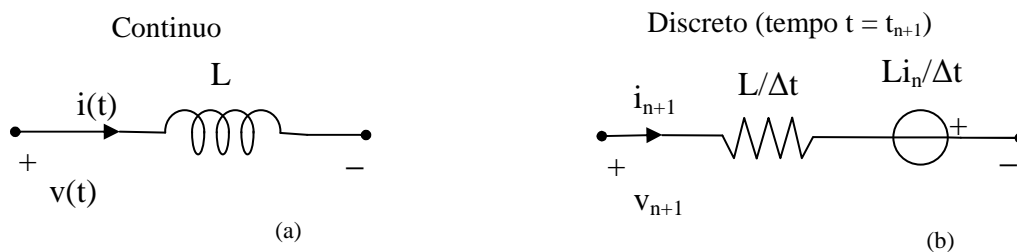


Figura 9 Induttore lineare: (a) continuo, (b) discreto.

### Condensatore

Il condensatore lineare ha come caratteristica nel dominio del tempo: 
$$i(t) = C \frac{d}{dt} v(t) \quad (25)$$

Utilizzando il metodo di Eulero implicito, la (25) si discretizza come segue:

$$i_{n+1} = (C/\Delta t) v_{n+1} - (C v_n/\Delta t) \quad (26)$$

ove  $\Delta t$  indica il passo temporale (costante). Al tempo  $t = t_{n+1}$  il circuito equivalente del condensatore si indica quindi come in figura 10.b, specificando il valore di resistenza  $\Delta t/C$  e la corrente impressa  $Cv_n/\Delta t$  (che si suppone nota, dato che  $v_n$  è la tensione al tempo  $t_n$ ), e sostituendo le variabili circuitali con i rispettivi simboli al tempo  $t = t_{n+1}$ .

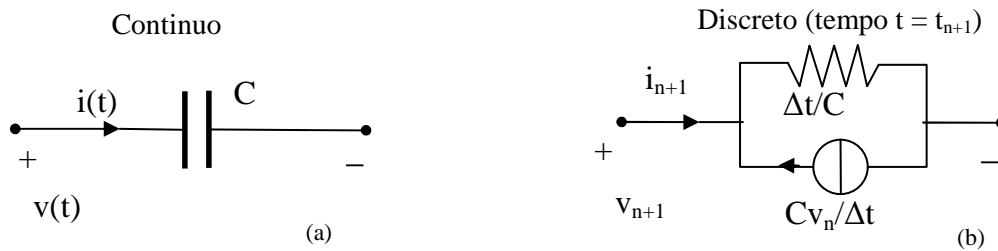


Figura 10 Condensatore lineare: (a) continuo, (b) discreto.

Quindi, passando dal continuo al discreto le LK sono formalmente identiche salvo il fatto che in luogo delle grandezze tensioni e correnti funzioni del tempo compaiono i rispettivi valori discreti. Anche le caratteristiche discretizzate dei generatori, sia indipendenti sia pilotati, del trasformatore ideale e del resistore sono formalmente identiche. Infine induttore e condensatore possono essere discretizzati con un unico componente lineare che formalmente è un generatore reale. Queste osservazioni permettono di affermare che tutti i metodi di soluzione applicabili ai circuiti privi di memoria (o in regime stazionario) nel dominio del tempo possono essere applicati anche ai circuiti discretizzati, salvo l'impiego delle variabili discrete. Valgono inoltre tutti i teoremi e le equivalenze sulle reti prive di memoria (serie, parallelo, trasformazioni stella-triangolo, Teoremi di Thevenin, di Norton, di Millman, etc.) con le dette modifiche. Quanto detto mostra anche come non sia necessario, ogni volta che si risolve un circuito con memoria, procedere alla determinazione delle equazioni di stato per poi discretizzarle, potendo discretizzare direttamente il circuito.

Per illustrare come sia possibile discretizzare direttamente un circuito si consideri il circuito lineare illustrato in figura 11.a, in regime DC per  $t < 0$ . Sostituendo ad ogni elemento circuitali nel continuo il corrispondente componente o circuito equivalente discreto si ottiene il circuito discretizzato al tempo  $t = t_{n+1}$  (vedi figura 11.b).

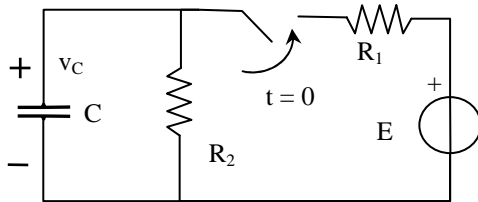


Figura 11.a

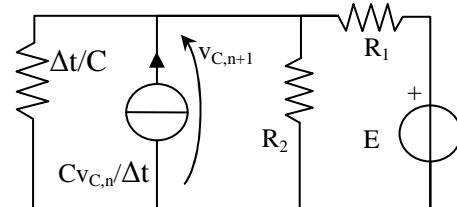
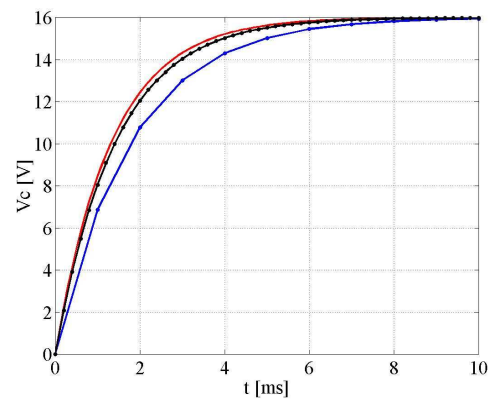


Figura 11.b

La tensione  $v_{C,n+1}$  è ottenibile utilizzando il Teorema di Millman:

$$v_{C,n+1} = \frac{E/R_1 + Cv_{C,n}/\Delta t}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/(\Delta t/C)} \quad (27)$$

Se i dati del problema sono  $E = 24 \text{ V}$ ,  $R_1 = 10 \text{ }\Omega$ ,  $R_2 = 20 \text{ }\Omega$ ,  $C = 200 \text{ }\mu\text{F}$ , iterando la (27) a partire dalla condizione iniziale nota  $v_C(0) = v_{C0} = 0$ , si ottiene l'approssimazione cercata. Per quanto riguarda la scelta del passo temporale, è necessario che sia sufficientemente piccolo rispetto alla scala temporale del problema (in questo caso la costante di tempo che è pari a  $\tau = 1.3 \text{ ms}$ ) La figura mostra le soluzioni numeriche ottenute per  $\Delta t = 1 \text{ ms}$  e  $\Delta t = 0.2 \text{ ms}$ . La curva continua rappresenta la soluzione esatta ottenuta integrando l'equazione di stato<sup>(\*)</sup>. Si noti che l'accuratezza della soluzione numerica dipende dalla scelta del passo temporale  $\Delta t$ .



<sup>(\*)</sup> L'equazione di stato del circuito è  $dv_C/dt = G_1E/C - (G_1 + G_2)v_C/C$ , dove le conduttanze  $G_1$  e  $G_2$  sono l'inverso delle resistenze  $R_1$  ed  $R_2$ , rispettivamente. La soluzione (per  $t > 0$ ) a partire dalla condizione iniziale nota  $v_C(0) = 0$  è data da:  $v_C(t) = G_1E (1 - e^{-t/\tau})/(G_1 + G_2)$ . La costante di tempo è  $\tau = C/(G_1 + G_2)$ .



La procedura descritta funziona anche per l'analisi dei circuiti non-lineari. A titolo di esempio si consideri il circuito mostrato in figura 12. L'induttore non-lineare presente nel circuito ha come caratteristica, con i versi associati di tensione e corrente,  $v = d\phi(i)/dt$ . La funzione  $\phi$  (continua e lineare a tratti) è mostrata nella figura 13.

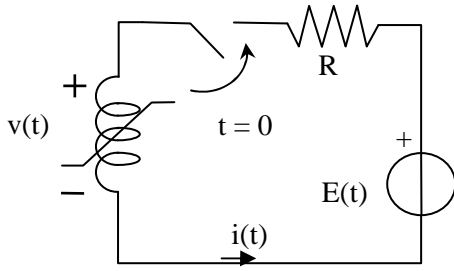


Figura 12

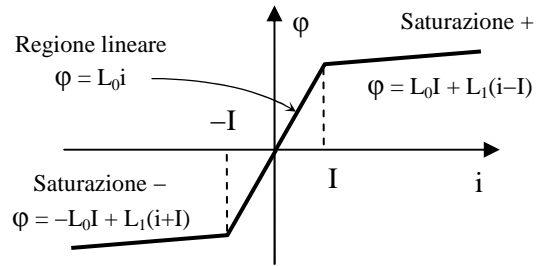


Figura 13

Utilizzando il metodo di Eulero implicito, la caratteristica dell'induttore non-lineare si discretizza come segue: ove  $\Delta t$  indica il passo temporale (costante). La (28) al tempo  $t = t_{n+1}$  rappresenta quindi la serie di un resistore non-lineare e di un generatore di tensione indipendente, come mostrato in figura 14.

$$v_{n+1} = \phi(i_{n+1})/\Delta t - \phi(i_n)/\Delta t \quad (28)$$

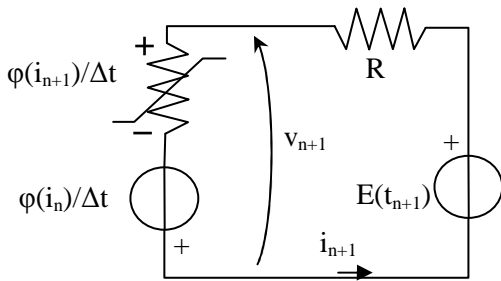


Figura 14

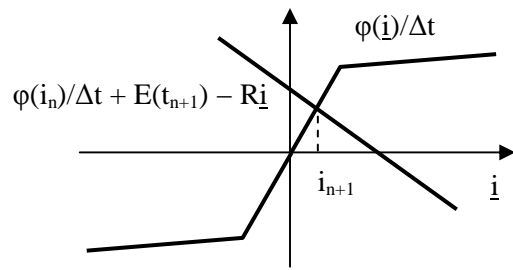


Figura 15

L'equazione necessaria per determinare la corrente  $i_{n+1}$  è immediatamente ottenibile utilizzando la LKT applicata all'unica maglia presente:  $0 = \phi(i_{n+1})/\Delta t - \phi(i_n)/\Delta t - E(t_{n+1}) + R i_{n+1}$ . La soluzione si può determinare per via grafica cercando l'intersezione (chiaramente unica) tra le due curve  $\phi(i)/\Delta t$  e  $\phi(i_n)/\Delta t + E(t_{n+1}) - R i$ , come mostrato nella figura 15. Supponendo, ad esempio, che i dati del problema siano  $E(t) = E_M \sin(\omega t)$ ,  $E_M = 20$  V,  $\omega = 314.16$  rad/s,  $R = 1$   $\Omega$ , ed utilizzando  $\Delta t = 0.5$  ms, l'andamento nel tempo della corrente e della tensione sull'induttore sono quelli mostrati nelle figure. Si noti come la fase transitoria si esaurisca durante il primo periodo e quindi si raggiunga una soluzione di regime periodica, con lo stesso periodo della tensione impressa ( $T = 2\pi/\omega = 20$  ms).

