TEORIA DEI CIRCUITI

1. DEFINIZIONI E LEGGI DI KIRCHHOFF

La carica elettrica, indicata con q, è la proprietà intrinseca della materia responsabile dei fenomeni elettrici e magnetici. L'unità di misura della carica elettrica è il Coulomb [C]. La carica elettrica è, sperimentalmente, sempre associata a portatori di carica dotati di massa. Questo significa che è possibile porre in movimento la carica elettrica (infatti, se la massa è non nulla, applicando una forza esterna al portatore di carica questo subirà una accelerazione, e quindi una velocità, non nulla). Il moto, o meglio lo spostamento, della carica elettrica richiede quindi energia (corrispondente al lavoro della forza esterna). Queste osservazioni giustificano le seguenti definizioni di corrente (elettrica) e tensione (elettrica):

*La **corrente**, indicata con i, che passa attraverso una data superficie orientata è definita dalla carica elettrica che attraversa quella superficie nell'unità di tempo.* L'unità di misura della corrente è l'Ampere [A]; un ampere è pari ad un coulomb al secondo. Il verso della corrente è quello della superficie orientata (indicato da una freccia). Si può dunque esprimere la corrente come:

$$i = dq/dt \tag{1}$$

*La **tensione**, indicata con v_{BA}, tra due terminali A e B in un circuito è il lavoro richiesto per muovere una carica positiva unitaria da A (terminale –) a B (terminale +).* L'unità di misura della tensione è il Volt [V]. Si può dunque esprimere la tensione come:

$$v_{BA} = dw_{A\to B}/dq \tag{2}$$

Un **componente** (o elemento) **elettrico** è una regione di spazio accessibile soltanto tramite terminali. È quindi possibile classificare i componenti sulla base del numero di terminali. Come mostrato nelle figure 1 e 2, un componente a due terminali è detto bipolo, uno a tre terminali è detto tripolo, etc., uno a N terminali è detto N-polo.

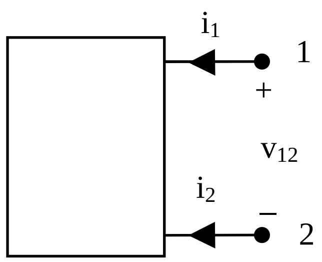


Figura 1. Componente a due terminali (bipolo).

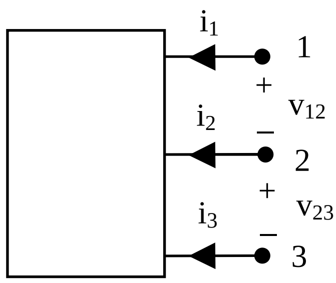


Figura 2. Componente a tre terminali (tripolo).

A ciascun terminale è associata una corrente che è univocamente definita, in valore e segno, una volta che sia stato arbitrariamente scelto il suo verso positivo (indicato dalla freccia): una corrente i_1 = 5 A significa che una corrente di intensità pari a 5 Ampere entra nel componente attraverso il terminale 1, viceversa, una corrente i_1 = – 5 A significa che una corrente di intensità pari a 5 Ampere esce dal componente attraverso il terminale 1.

Ad ogni coppia di terminali è associata una tensione che è univocamente definita, in valore e segno, una volta che sia stato arbitrariamente scelto il terminale di riferimento (indicato col segno –): una tensione v_{12} = 5 V significa che il terminale 1 si trova ad un potenziale superiore di 5 Volt rispetto a quello del terminale 2, viceversa una tensione v_{12} = – 5 V significa che il terminale 1 si trova ad un potenziale inferiore di 5 Volt rispetto a quello del terminale 2. Spesso l'indicazione del "–" e del "+" viene sostituita da una freccia che indica il terminale positivo.

In particolare, se la tensione tra i terminali di un bipolo è nulla (v_{12} = 0), essi sono collegati tramite una connessione ideale (o cortocircuito) il cui simbolo è mostrato in figura 3. Pertanto, per definizione, non è richiesto lavoro per spostare una carica tra i terminali di un cortocircuito.

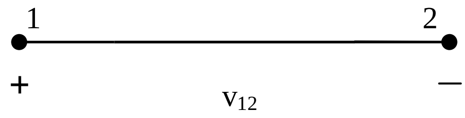


Figura 3. Connessione ideale (v_{12} = 0)

Un **circuito elettrico** (o rete elettrica) **a costanti concentrate** è un insieme di componenti elettrici collegati tramite connessioni ideali e soggetto ai vincoli [definiti nel seguito] noti come Leggi di Kirchhoff. Nel seguito, per semplicità, con il termine circuito elettrico si intenderà circuito elettrico a costanti concentrate[(o)]. Inoltre, <u>si supporrà che i circuiti in esame siano costituiti di soli bipoli</u>; se ciò non fosse vero, si può pensare di ricondursi a tale ipotesi sostituendo i componenti con più di due terminali con opportuni circuiti equivalenti costituiti da soli bipoli: ciò è sicuramente possibile mediante l'introduzione di generatori pilotati [vedi seguito].

Un **nodo** di un circuito elettrico è un punto a cui sono collegati due o più terminali, oppure è un terminale isolato. Il circuito mostrato nella figura 4 è costituito da cinque bipoli; collegati a 4 nodi (A, B, C, D).

Una **sequenza chiusa di nodi** è una successione di nodi tale che il primo nodo coincide con l'ultimo. (Ad esempio, sono sequenze chiuse AA, ABA, ABCA, ABCDA, etc.)

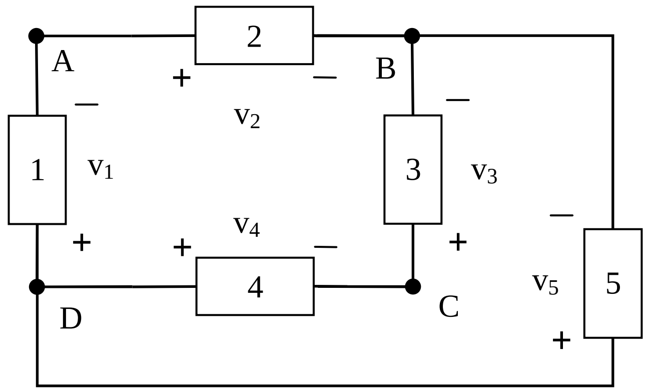


Figura 4. Circuito costituito da 5 bipoli e 4 nodi.

> La **LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE TENSIONI (LKT)** afferma che per una qualsiasi sequenza chiusa di nodi la somma delle tensioni tra coppie ordinate di nodi successivi è nulla.

Con riferimento al circuito della figura 4, applicando la LKT alla sequenza chiusa di nodi ABCA si ottiene la seguente equazione[(*)]:

$$v_{AB} + v_{BC} + v_{CA} = 0 \tag{4}$$

Le **tensioni di nodo** (o potenziali di nodo) di un circuito sono le tensioni di tutti i nodi rispetto ad un nodo assunto come riferimento, la cui scelta è arbitraria. La LKT permette di esprimere la tensione tra una qualsiasi coppia di nodi del circuito come differenza delle relative tensioni di nodo: con riferimento alla figura 4, supponendo di scegliere il nodo A come nodo di riferimento (e posto dunque $e_A = v_{AA} = 0$), ed indicando con e_B ed e_C le tensioni di nodo dei nodi B e C ($e_B = v_{BA}$; $e_C = v_{CA}$) la equazione (4) permette di scrivere:

$$v_{BC} = e_B - e_C \tag{5}$$

La sequenza chiusa di nodi ABCDA individua un percorso chiuso attraverso i componenti del circuito: i tratti di tale percorso all'interno di ciascun componente vengono detti **rami** ed il percorso, **maglia**. Applicando la LKT alla maglia ABCDA, tenendo conto dei versi positivi scelti per le ten-

---

(o) Nei circuiti a costanti concentrate le proprietà elettriche del circuito, come resistenza, induttanza, capacità [vedi seguito] si considerano tutte contenute (concentrate) nei relativi componenti circuitali ed i collegamenti tra componenti sono realizzati tramite connessioni ideali prive di resistenza, induttanza e capacità. Una rappresentazione più accurata di ogni dispositivo reale mostra tuttavia come tali proprietà siano distribuite all'interno del dispositivo e quali siano i limiti di applicazione del modello circuitale a costanti concentrate (passaggio dalla teoria dei circuiti alla teoria dei campi).

(*) Si noti che applicando la LKT alla sequenza chiusa di nodi AA si ottiene $v_{AA} = 0$, qualunque sia il nodo A. Inoltre, applicando la LKT alla sequenza chiusa di nodi ABA si ottiene $v_{AB} + v_{BA} = 0$, ovvero $v_{BA} = -v_{AB}$. Quindi scambiare i terminali cambia segno alla tensione.

sioni ai terminali dei componenti (**tensioni di ramo**) e del verso di circuitazione della maglia, si ottiene la seguente relazione:

$$v_2 - v_3 - v_4 + v_1 = 0 \tag{6}$$

La LKT applicata ad una maglia del circuito afferma che la somma algebrica delle tensioni di ramo (sui rami che compongono la maglia) è nulla.

La **LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE CORRENTI (LKC)** afferma che per ogni superficie chiusa (che non interseca i componenti) la somma algebrica delle correnti che la attraversano è nulla.

È sufficiente definire una sola corrente in ogni ramo. Infatti, si consideri la superficie chiusa S che racchiude al suo interno un solo bipolo (vedi figura 5a). La corrente i_1 entra in S, mentre la corrente i_2 esce da S. Assumendo positive le correnti uscenti e negative quelle entranti, la LKC afferma quindi che $i_2 - i_1 = 0$, da cui segue che: $i_2 = i_1$. Tenendo conto di ciò, con riferimento alla figura 5b si consideri la superficie chiusa S_1 che racchiude al suo interno il ramo 1.

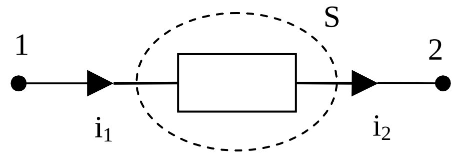


Figura 5.a

Le correnti che attraversano S_1 sono i_2 e i_4, che entrano nella superficie, e la corrente i_5, che ne esce, per cui la LKC applicata a S_1 permette di scrivere la seguente equazione:

$$-i_2 - i_4 + i_5 = 0 \tag{7}$$

Si noti che la corrente i_1, essendo all'interno di S_1, non compare nella (7).

Si consideri ora la superficie chiusa S_2 che racchiude al suo interno solo il nodo B. La LKC applicata a S_2 permette di scrivere:

$$i_2 - i_3 - i_5 = 0 \tag{8}$$

che si può interpretare come LKC nel nodo B.

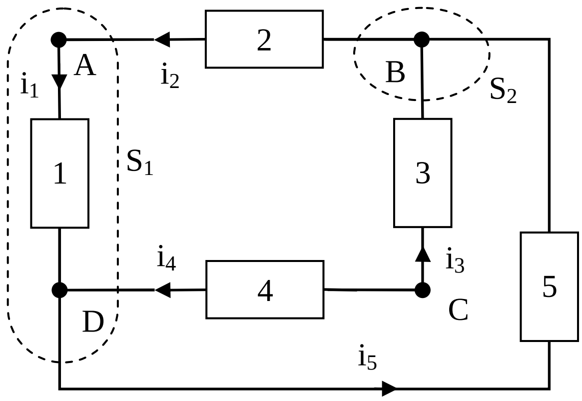


Figura 5.b

Le LKC applicate a tutti i nodi di un circuito non sono indipendenti.[#] Applicando la LKC a tutti i quattro nodi del circuito di figura 5.b si ottengono le quattro equazioni a lato. Come è immediato verificare, la somma delle equazioni porta ad una identità (0 = 0). Tale risultato generale è dovuto la fatto che ogni corrente di ramo i_k compare esattamente due volte, con segni opposti, nelle LKC relative ai nodi che sono i terminali del ramo k.

$$\begin{array}{rrrrrr} +i_1 & -i_2 & & & & =0 \\ & +i_2 & -i_3 & & -i_5 & =0 \\ & & +i_3 & +i_4 & & =0 \\ -i_1 & & & -i_4 & +i_5 & =0 \\ \hline +0 & +0 & +0 & +0 & +0 & =0 \end{array}$$

Una delle equazioni è dunque una combinazione lineare delle altre N – 1 = 3, e si può omettere. Le rimanenti N – 1 = 3 equazioni sono chiaramente indipendenti in quanto, qualunque sia l'equazione omessa (ad esempio la quarta, nodo D), tutte le correnti di ramo presenti nell'equazione eliminata compaiono *una sola volta* nelle restanti equazioni (ad esempio i_1, i_4 ed i_5). Le equazioni LKC indipendenti sono quindi N – 1.

[#] Un insieme di n equazioni lineari in m variabili ($m \geq n$) sono linearmente indipendenti se la matrice dei coefficienti è di rango massimo (ovvero esiste una sottomatrice quadrata $n \times n$ con determinante non nullo). Ovviamente, l'indipendenza delle equazioni è essenziale per poter ottenere un sistema di equazioni univocamente solubile [vedi seguito] la cui soluzione permette di determinare i valori delle variabili circuitali, cioè tensioni e correnti.

Le due leggi di Kirchhoff, delle tensioni e delle correnti, permettono di scrivere delle equazioni lineari tra le tensioni e le correnti che non dipendono dalla natura dei componenti presenti nel circuito, ma unicamente da come essi sono collegati tra di loro (topologia del circuito).

Sia dato un circuito caratterizzato da R rami ed N nodi (ad esempio per il circuito di figura 5.b, N = 4 ed R = 5). Per ciascun ramo si assumano versi positivi per la tensione di ramo e la corrente di ramo associati secondo la scelta dell'utilizzatore, ossia quando la corrente entra nel terminale positivo (vedi figura 6.a). I versi di riferimento associati secondo la scelta del generatore sono illustrati nella figura 6.b, in cui la corrente esce dal terminale positivo. Nel seguito, per semplicità, con il termine versi associati si intenderà associati secondo la scelta dell'utilizzatore.

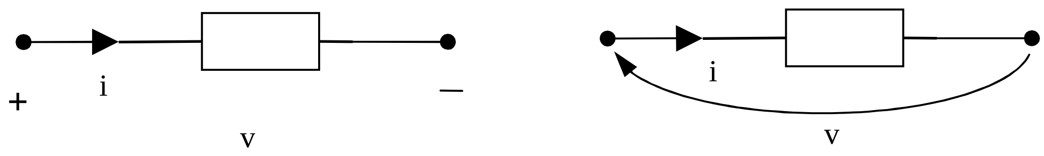


Figura 6.a Versi di riferimento associati (secondo la scelta dell'utilizzatore) per la tensione e la corrente di ramo. A destra, l'indicazione del "–" e del "+" è sostituita da una freccia che indica il terminale positivo.

Figura 6.b Versi di riferimento associati (secondo la scelta del generatore) per la tensione e la corrente di ramo. A destra, l'indicazione del "–" e del "+" è sostituita da una freccia che indica il terminale positivo.

Preso arbitrariamente un nodo come nodo di riferimento del circuito, la LKT permette di scrivere R relazioni del tipo (5) linearmente indipendenti che in forma matriciale assumono la forma: (##)

$$\mathbf{v} = \mathbf{M}\,\mathbf{e} \qquad (9)$$

dove **v** è il vettore delle tensioni di ramo, **e** è il vettore delle tensioni di nodo ed **M** è una matrice avente R righe ed (N – 1) colonne, il cui generico elemento M_{hk} risulta nullo se il ramo h non è collegato al nodo k, uguale a + 1 se la corrente del ramo h esce dal nodo k, – 1 se la corrente del ramo h entra nel nodo k. A titolo di esempio si consideri ancora il circuito di figura 5.b, utilizzando *versi di riferimento associati secondo la scelta dell'utilizzatore per le tensioni e le correnti di ramo* e prendendo D come nodo di riferimento ($e_D = 0$). Si ha quindi:

$$\begin{cases} v_1 = e_A \\ v_2 = e_B - e_A \\ v_3 = e_C - e_B \\ v_4 = e_C \\ v_5 = -e_B \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_A \\ e_B \\ e_C \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La LKC applicata a tutti i nodi tranne quello di riferimento permette di scrivere (N – 1) equazioni del tipo (8) che in forma matriciale assumono la forma:

(##) Si noti che in questa forma, ossia definite su tutti i rami utilizzando le tensioni di ramo e le tensioni di nodo, le LKT sono indipendenti (le colonne della matrice dei coefficienti corrispondenti alle tensioni di ramo costituiscono la matrice identità R×R, che ha determinante unitario). Per valutare invece quante siano le LKT indipendenti quando sono applicate alle maglie (ovvero quando sono formulate solo in termini di sole tensioni di ramo) si utilizzeranno i grafi orientati [vedi seguito].

$$\mathbf{A}\,\mathbf{i} = \mathbf{0} \qquad (10)$$

dove **i** è il vettore delle correnti di ramo ed **A** è una matrice, chiamata matrice di incidenza ridotta, avente (N – 1) righe ed R colonne, il cui generico elemento A_{hk} risulta nullo se il ramo k non è collegato al nodo h, uguale a +1 se la corrente del ramo k esce dal nodo h, − 1 se la corrente del ramo k entra nel nodo h. A titolo di esempio si consideri ancora il circuito di figura 5.b. Si ha quindi:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 = 0 \\ i_2 - i_3 - i_5 = 0 \\ i_3 + i_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & 0 \end{bmatrix}$$

Risulta quindi dalle definizioni che **M** è la trasposta di **A**, cioè:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^T \qquad (11)$$

Facendo riferimento a versi di tensione e corrente associati secondo la scelta dell’utilizzaztore, si definisce **<u>potenza istantanea assorbita</u>** da un bipolo in un generico istante t, il prodotto tra la tensione presente ai suoi terminali all'istante t e la corrente che lo attraversa in quell'istante:

$$p(t) = v(t)\, i(t) \qquad (12)$$

Infatti, dalle definizioni di i = dq/dt e di v = dw/dq, si ha v i = (dw/dq)(dq/dt) = dw/dt = p. Nel caso in cui i versi della tensione e della corrente siano associati secondo la scelta del generatore, il prodotto vi definisce la potenza elettrica erogata dal bipolo. La **potenza erogata** è l’opposto della potenza assorbita: $p_{(erogata)} = -\, p_{(assorbita)}$. Si noti che termini “assorbita” ed “erogata” indicano il verso di riferimento dello scambio energetico tra il bipolo ed il resto del circuito a cui è collegato. L’unità di misura della potenza è il Watt [W]. Ad esempio una potenza assorbita p = 2 W significa che il circuito a cui è collegato trasferisce nel bipolo una energia di 2 Joule al secondo. Viceversa, una potenza assorbita p = –2 W indica che è il bipolo a trasferire nel circuito una energia di 2 Joule al secondo, quindi in questo caso è più utile dire che la potenza erogata dal bipolo è 2 W.

Più in generale, facendo riferimento ad un generico componente con N terminali, la potenza elettrica assorbita da tale componente in un generico istante t è data dalla seguente espressione:

$$p(t) = \sum_{k=1}^{N-1} v_{kN}(t)\, i_k(t)$$

dove si è preso il terminale N come terminale di riferimento per le tensioni ed i versi positivi delle correnti sono tutti entranti nell'elemento. Si può dimostrare che la potenza elettrica assorbita non dipende dalla scelta del terminale di riferimento.

Dalle equazioni (9), (10) ed (11) segue il **Teorema di Tellegen** che afferma che, per un dato circuito, presi un qualsiasi vettore di tensioni di ramo **v**, che soddisfi le LKT ed un qualsiasi vettore di correnti di ramo **i**, che soddisfi le LKC, vale la relazione:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{i} = 0 \qquad (13)$$

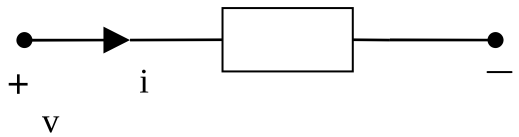
Infatti, si ha: $\mathbf{v}^T \mathbf{i} = (\mathbf{M}\,\mathbf{e})^T \mathbf{i} = \mathbf{e}^T \mathbf{M}^T \mathbf{i} = \mathbf{e}^T \mathbf{A}\mathbf{i} = \mathbf{e}^T \mathbf{0} = 0$

Se si applica la (13) considerando i vettori delle tensioni e delle correnti effettivamente presenti nel circuito, si ottiene la relazione (14) che, sulla base della definizione (12), mostra come <u>la somma delle potenza assorbite da tutti i rami di un circuito è in ogni istante nulla</u> (**bilancio delle potenze**).

$$\mathbf{v}^T \mathbf{i} = \textstyle\sum_k v_k\, i_k = \sum_k p_k = 0 \qquad (14)$$

2. COMPONENTI IDEALI

Nel seguito vengono descritte e discusse le caratteristiche e le proprietà di alcuni tra i componenti ideali di impiego più diffuso in elettrotecnica. In generale i componenti a due terminali (bipoli) sono caratterizzati da una relazione (caratteristica o equazione costitutiva) tra la corrente che li attraversa e la tensione tra i loro terminali[(o)]:



Caratteristica di un bipolo:

$$f(\mathrm{i}, \mathrm{v}) = 0$$

Un bipolo in cui sia determinabile la tensione nota la corrente si dice <u>controllato in corrente</u> (cioè, è possibile alimentarlo con un generatore di corrente con corrente impressa qualsiasi [definito nel seguito] e ad ogni valore della corrente corrisponde un solo valore della tensione); analogamente, un componente in cui sia determinabile la corrente nota la tensione si dice <u>controllato in tensione</u> (cioè, è possibile alimentarlo con un generatore di tensione con tensione impressa qualsiasi [definito nel seguito] e ad ogni valore della tensione corrisponde un solo valore della corrente). Infine, <u>due bipoli sono equivalenti se le loro caratteristiche sono uguali</u> (anche se hanno una struttura interna differente). I componenti con N terminali sono definiti da N−1 caratteristiche (funzione in generale di tutte le tensioni e le correnti). Due componenti sono equivalenti quando hanno le stesse caratteristiche[(*)].

2.1 Resistore lineare

Il simbolo del resistore lineare è indicato nella figura 7. Con riferimento a versi associati di tensione e corrente, la caratteristica del resistore lineare è la seguente:

$$\mathrm{v} = \mathrm{R\ i} \qquad (15.a)$$

(Legge di Ohm) o, alternativamente

$$\mathrm{i} = \mathrm{G\ v} \qquad (15.b)$$

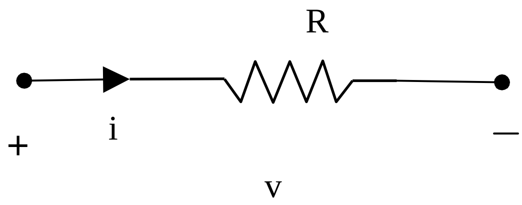


Figura 7 Resistore lineare

dove R è una costante positiva detta resistenza (misurata in Ω [Ohm]), G è una costante positiva detta conduttanza (misurata in S [Siemens]) e risulta G = 1/R. L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

$$\mathrm{p} = \mathrm{v\ i} = (\mathrm{R\ i})\ \mathrm{i} = \mathrm{R\ i}^2 = \mathrm{i}^2/\mathrm{G} \qquad (16.a)$$

o, alternativamente

$$\mathrm{p} = \mathrm{v\ i} = \mathrm{v}\ (\mathrm{v}/\mathrm{R}) = \mathrm{v}^2/\mathrm{R} = \mathrm{G\ v}^2 \qquad (16.b)$$

Se la resistenza R è positiva, la potenza elettrica assorbita risulta essere sempre positiva, o al più nulla quando la corrente è nulla; i componenti che godono di tale proprietà vengono detti **componenti passivi**. Come si vedrà nel seguito, un filo di rame (con resistività ρ) di lunghezza L e sezione

---

(o) Nella caratteristica compaiono tipicamente anche uno o più parametri, di solito costanti. Anche il tempo può comparire esplicitamente nella relazione caratteristica. In tal caso il componente è detto *tempo-variante*, altrimenti il componente è detto *tempo-invariante*. Tutti i componenti trattati nel seguito sono tempo-invarianti.

I versi di tensione e corrente sono definibili arbitrariamente (tuttavia spesso sono associati con la scelta dell'utilizzatore). A seconda del tipo di componente, la caratteristica può dipendere da tale scelta.

Per semplicità di notazione la caratteristica tensione-corrente è rappresentata come una funzione, ma in generale non lo è; ad esempio, può dipendere dalle derivate nel tempo di tensione e corrente (vedi induttore e condensatore, oppure ad un valore di corrente o tensione possono corrispondere infiniti valori di tensione o corrente (vedi il diodo ideale).

(*) La nozione di equivalenza è particolarmente utile nel caso in cui il componente sia lineare. Per <u>componente lineare</u> si intende un componente con tutte le caratteristiche lineari, ovvero tale che le caratteristiche sono soddisfatte su tutta la linea congiungente due insiemi dati di variabili che soddisfano le caratteristiche. Ovvero, nel caso di un bipolo lineare, se $f(\mathrm{i}_1, \mathrm{v}_1) = 0$ ed $f(\mathrm{i}_2, \mathrm{v}_2) = 0$, allora $f(\lambda \mathrm{i}_1 + (1-\lambda)\mathrm{i}_2, \lambda \mathrm{v}_1 + (1-\lambda)\mathrm{v}_2) = 0$, per ogni λ costante.

S può essere modellato per mezzo di un resistore di resistenza R = ρL/S, in cui la potenza elettrica assorbita viene trasformata in potenza termica per “effetto Joule”.

Dalla (15.a) segue che, se R è positiva e finita, il resistore è un componente controllato in corrente (se è nota la corrente allora è nota anche la tensione). Inoltre dalla (15.b), se G è positiva e finita, il resistore è anche un componente controllato in tensione (se è nota la tensione allora è nota anche la corrente). Pertanto, il resistore un resistore lineare di resistenza e conduttanza non nulle è controllato sia in tensione sia in corrente.

La connessione ideale, illustrata nella figura 3 ed anche chiamata cortocircuito, può essere considerata un resistore lineare di resistenza nulla (o conduttanza infinita). Come tale è un componente controllato in corrente, ma non in tensione; infatti ad un unico valore di tensione (zero) corrispondono infiniti valori possibili della corrente. Viceversa, un circuito aperto, il cui simbolo è rappresentato nella figura 8, può essere considerato come un resistore di conduttanza zero (o resistenza infinita) e come tale è un componente controllato in tensione, ma non in corrente: infatti all'unico valore possibile della corrente (zero) corrisponde una infinità di valori possibili della tensione.

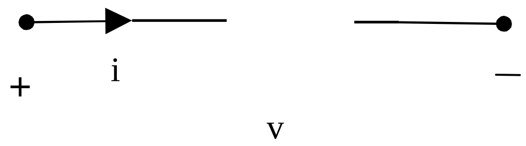
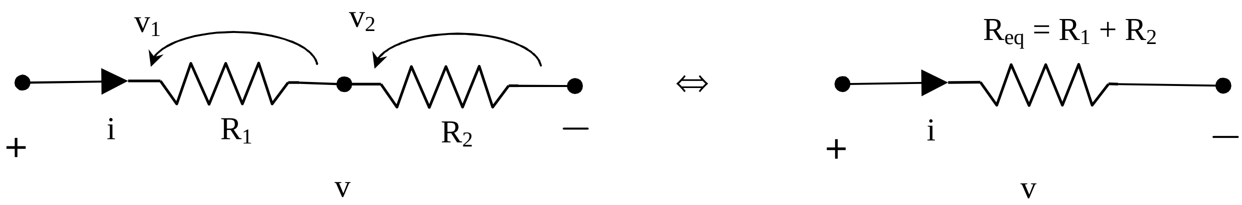


Figura 8. Circuito aperto (i = 0)

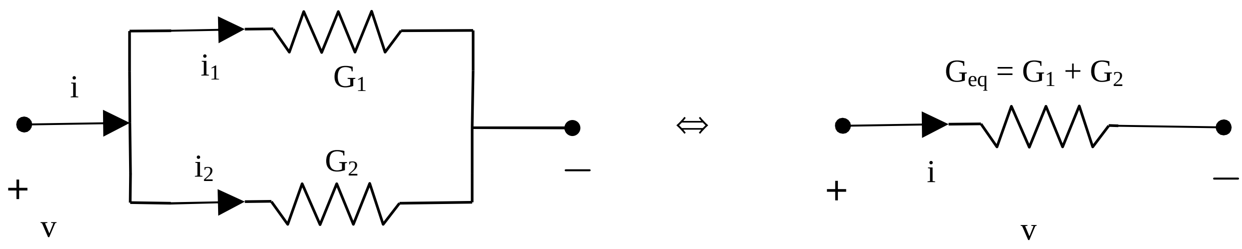
Due bipoli si dicono collegati in serie quando sono percorsi dalla stessa corrente. In figura 9.a è illustrata la serie di due resistori. Confrontando le caratteristiche si ottiene l’equivalenza con un solo resistore avente una resistenza (equivalente) pari alla somma delle due resistenze. La relazione ottenuta è generalizzabile ad un numero qualsiasi di resistori in serie (per definizione tutti percorsi dalla stessa corrente): $R_{eq} = \Sigma_k R_k$.



$$v = v_1 + v_2 = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2)i = R_{eq} i$$

Figura 9.a Resistori collegati in serie

Due bipoli si dicono collegati in parallelo quando sono soggetti alla stessa tensione. In figura 9.b è illustrato il parallelo di due resistori. Confrontando le caratteristiche si ottiene l’equivalenza con un solo resistore avente una conduttanza (equivalente) pari alla somma delle due conduttanze(*). La relazione ottenuta è generalizzabile ad un numero qualsiasi di resistori in parallelo (che, per definizione, sono tutti soggetti alla stessa tensione): $G_{eq} = \Sigma_k G_k$.



$$i = i_1 + i_2 = G_1 v + G_2 v = (G_1 + G_2)v = G_{eq} v$$

(*) Se si utilizzano le resistenze si ottiene $R_{eq} = R_1R_2/(R_1 + R_2)$

Figura 9.b Resistori collegati in parallelo

Trasformazioni stella-triangolo e triangolo-stella

Oltre a serie e parallelo esistono altri schemi di connessione. Nella figura 10.a sono mostrati tre resistori collegati a stella; nella figura 10.b sono mostrati tre resistori collegati a triangolo. Entrambi i sistemi costituiscono un tripolo che viene collegato al circuito esterno attraverso i tre terminali 1, 2 e 3. Facendo uso delle Leggi di Kirchhoff e delle relazioni costitutive dei resistori è possibile dimostrare che, per quanto riguarda le tensioni e le correnti ai terminali (i_1, i_2 e i_3), è possibile sostituire tre resistori collegati a stella con tre resistori, di resistenza opportuna, collegati a triangolo e viceversa. La sostituzione va intesa nel senso che qualunque sia il sistema di tensioni applicate ai terminali il sistema di correnti assorbito dai due carichi è lo stesso (i due tripoli sono equivalenti).

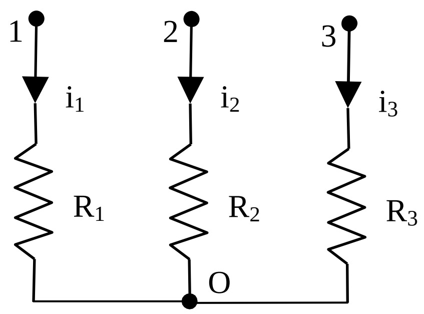


Figura 10.a – Stella di resistori

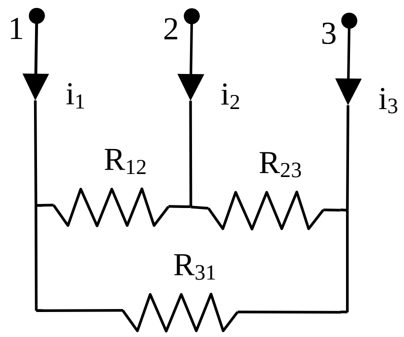


Figura 10.b – Triangolo di resistori

Con riferimento alle figure 10.a e 10.b, le espressioni delle trasformazioni stella-triangolo e triangolo-stella sono le seguenti dove è indicata con G la conduttanza, cioè l'inverso della resistenza R.

Trasformazione triangolo-stella

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

$$R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

Trasformazione stella-triangolo

$$G_{12} = \frac{G_1G_2}{G_1+G_2+G_3}$$

$$G_{23} = \frac{G_2G_3}{G_1+G_2+G_3}$$

$$G_{31} = \frac{G_3G_1}{G_1+G_2+G_3}$$

Si noti che nel caso particolare in cui i resistori a stella abbiano lo stesso valore di conduttanza, ovvero $G_1 = G_2 = G_3 = G_Y$, anche i resistori nel triangolo equivalente sono uguali fra loro, ovvero $G_{12} = G_{23} = G_{31} = G_\Delta = G_Y/3$. Allo stesso modo, utilizzando le resistenze, si ha $R_Y = R_\Delta/3$.

Per dimostrare le relazioni di trasformazione stella-triangolo si consideri la stella di resistori, caratterizzati tramite le rispettive conduttanze, mostrata in figura 10.a. L'obiettivo è determinare una configurazione di resistori equivalente per i terminali 1, 2, 3, che non contenga il nodo centrale O, ovvero che contenga solo resistori connessi tra ogni coppia di terminali 1, 2, 3 (triangolo).

Per la stella, la corrente entrante nel generico nodo k è data da: $i_k = G_k\,(e_k - e_O)$. La somma delle correnti entranti dai terminali 1, 2, 3 deve essere nulla per la LKC_n applicata al nodo O. Pertanto:

$$\sum_k i_k = 0 = \sum_k G_k e_k - \sum_k G_k e_O$$

Dove le sommatorie si intendono su 1, 2, 3. La tensione del nodo O risulta quindi: $e_O = \dfrac{\sum_k G_k e_k}{\sum_k G_k}$

Cambiando l'indice di somma (che è irrilevante) e sostituendo nella relazione tensione-corrente di partenza si ha quindi:

$$i_k = \frac{\sum_h G_k G_h e_k - \sum_h G_k G_h e_h}{\sum_h G_h} = \frac{\sum_h G_k G_h (e_k - e_h)}{\sum_p G_p} = \sum_h \frac{G_k G_h}{\sum_p G_p}(e_k - e_h)$$

Per il triangolo, la corrente entrante nel generico nodo k è data da: $i_k = \Sigma_h G_{kh} (e_k - e_h)$. Per confronto si ha quindi:

$$G_{kh} = \frac{G_k G_h}{\sum_p G_p} \qquad \text{con h, k = 1, 2, 3}$$

La trasformazione inversa (da triangolo a stella) si ottiene invertendo queste relazioni. Infatti, posto $S = \sum_k G_k$, si ha: $R_{12} = R_1 R_2 S$, $R_{23} = R_2 R_3 S$, ed $R_{31} = R_3 R_1 S$. Quindi

$$R_{12} + R_{23} + R_{31} = (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1)\, S$$

Poiché $S = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}{R_1 R_2 R_3}$, si ha

$$R_1 R_2 R_3 S^2 = (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1) S = R_{12} + R_{23} + R_{31}$$

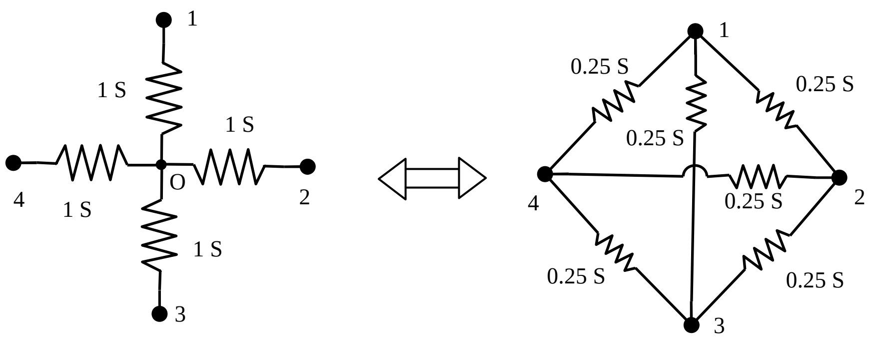
Infine:

$$\frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = \frac{(R_1 R_2 S)(R_3 R_1 S)}{R_1 R_2 R_3 S^2} = R_1$$

Le altre due relazioni si ottengono allo stesso modo permutando gli indici.

Trasformazione stella-poligono

La trasformazione stella-triangolo si può estendere immediatamente (basta intendere gli indici da 1 a n) alla trasformazione stella-poligono. In questo caso la stella (assegnata) è costituita da n resistori con un terminale comune ed il poligono (con tutte le diagonali) da n(n-1)/2 resistori. La trasformazione inversa invece non è generalmente possibile. A titolo di esempio si consideri la seguente stella a 4 terminali (si noti che anche in questo caso la trasformazione elimina il nodo comune O):



2.2 Induttore lineare

Si definisce induttore lineare un componente a due terminali il cui simbolo è indicato nella figura 11 caratterizzato dalla seguente legge costitutiva:

$$v = L\frac{di}{dt} \tag{17}$$

dove L è una costante positiva chiamata induttanza, misurata in H [Henry]. L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

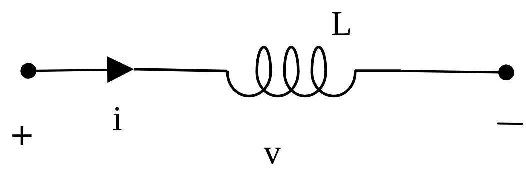


Figura 11. Induttore lineare

$$p = vi = L\frac{di}{dt}i = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) \tag{18}$$

La (18) mostra come tutta la energia elettrica assorbita dall'induttore vada ad incrementare il termine $W_m = Li^2/2$ che assume quindi il significato di energia magnetica immagazzinata nell'induttore; tale energia, una volta immagazzinata, può essere poi interamente restituita ai componenti del circuito cui è collegato l'induttore. Pertanto, la potenza elettrica assorbita dall'induttore può assumere valori sia positivi che negativi. Si noti che il valore della corrente individua univocamente lo stato energetico dell'induttore; la corrente dunque è la variabile di stato dell'induttore.

L'equazione costitutiva dell'induttore (17) permette in ogni istante, se è noto il valore della tensione, di calcolare la derivata temporale della corrente lasciandone però completamente indeterminato il valore.

La corrente all'istante t si ottiene integrando la (17) nel tempo. Supponendo che all'istante $-\infty$, quando è stato assemblato il circuito, la corrente sull'induttore fosse nulla, si ottiene:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\, d\tau \qquad (19)$$

La (19) mostra che il valore della corrente all'istante t dipende dal valore della tensione in tutti gli istanti precedenti. Per indicare ciò si dice che l'induttore è un componente dotato di memoria. L'induttore, se L è positiva, quindi è un componente non controllato in tensione né in corrente. Infine, se l'induttore è in regime stazionario(°) (o se L è nulla) è equivalente ad un cortocircuito.

2.3 Condensatore lineare

Il simbolo del condensatore è indicato nella figura 12, la sua legge costitutiva è la seguente:

$$i = C\frac{dv}{dt} \qquad (20)$$

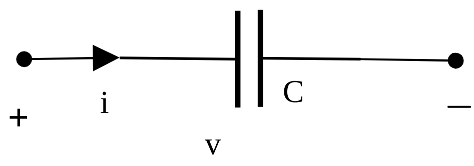


Figura 12. Condensatore lineare.

dove C è una costante positiva chiamata capacità del condensatore (misurata in F [Farad]).

L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

$$p = vi = vC\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cv^2\right) \qquad (21)$$

La (21) mostra come tutta la energia elettrica assorbita dall'induttore vada ad incrementare il termine $W_e = Cv^2/2$ che assume quindi il significato di energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore; tale energia, una volta immagazzinata, può essere successivamente restituita ai componenti del circuito cui è collegato il condensatore. La potenza elettrica assorbita dal condensatore può quindi assumere valori sia positivi che negativi. Si noti che il valore della tensione individua univocamente lo stato energetico del condensatore e perciò la tensione è la variabile di stato del condensatore. [Dal confronto della caratteristica del condensatore (20) con la definizione di corrente (1) si deduce che q = Cv è una carica elettrica. Come si vedrà a proposito del condensatore reale, le cariche q e –q sono accumulate sulle due parti che costituiscono il condensatore stesso (armature). L'accumulo di energia si può quindi far corrispondere anche all'accumulo di carica ($W_e = q^2/2C$).]

Analogamente all'induttore, anche il condensatore è un componente con memoria; infatti, integrando la (20) dall'istante $-\infty$, in cui è stato assemblato il circuito ed in cui la tensione sul condensatore si suppone nulla, al generico istante t si ottiene:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau \qquad (22)$$

La (22) mostra quindi che il valore della tensione in un generico istante t dipende dal valore della corrente in tutti gli istanti precedenti. Il condensatore, se C è positiva, quindi è un componente non controllato in tensione né in corrente. Infine, se il condensatore è in regime stazionario (o se C è nulla) è equivalente ad un circuito aperto.

(°) Un circuito è in regime stazionario (o regime DC "Direct Current", o in corrente continua,) se ogni tensione e corrente nel circuito è costante nel tempo. In tal caso, per definizione, si ha $d/dt \equiv 0$.

2.4 Generatore di tensione

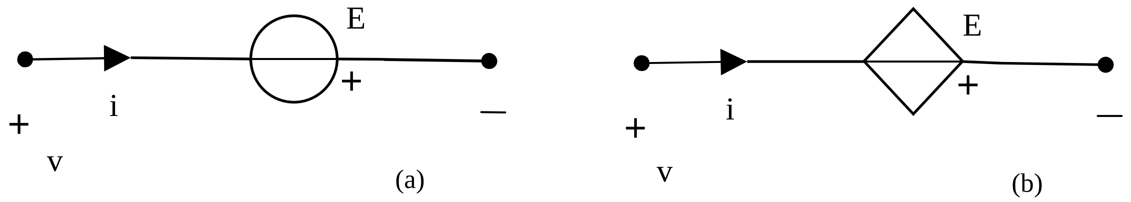


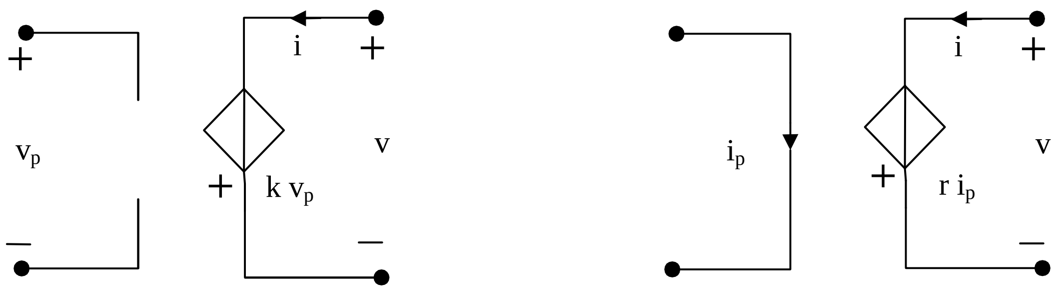
Figura 13. Generatore di tensione: (a) indipendente, (b) pilotato.

Il simbolo del generatore indipendente di tensione è indicato nella figura 13.a, quello del generatore di tensione pilotato (o dipendente) nella figura 13.b; nel primo caso la tensione impressa E del generatore (o forza elettro-motrice del generatore) è una funzione nota del tempo, nel secondo caso dipende dal valore della tensione (generatore di tensione pilotato in tensione: GTPT) o della corrente (generatore di tensione pilotato in corrente: GTPC) di un altro ramo del circuito. Il terminale contrassegnato dal segno + indica il terminale positivo della tensione impressa.

Con riferimento ai versi positivi delle grandezze indicati nella figura 13, l'equazione costitutiva del generatore di tensione è la seguente:

$$v = -E \qquad (23)$$

In figura sono illustrati i GTPT (caratteristica: $v = -k\, v_p$) e GTPC (caratteristica: $v = -r\, i_p$) lineari.



L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13):

$$p = v\, i = -E\, i \qquad (24)$$

La potenza elettrica assorbita risulta quindi positiva o negativa a seconda che la corrente attraversi il generatore nel verso associato o non associato (secondo la convenzione degli utilizzatori) rispetto a quello della tensione impressa. Il generatore indipendente di tensione è quindi in grado di assorbire od erogare, in dipendenza dalle condizioni di lavoro del circuito, una potenza elettrica di valore qualsiasi, mantenendo comunque inalterato il valore della tensione ai terminali. Il generatore indipendente di tensione è un componente controllato in corrente. Il generatore dipendente di tensione non è un componente controllato né in tensione né in corrente.

2.5 Generatore di corrente

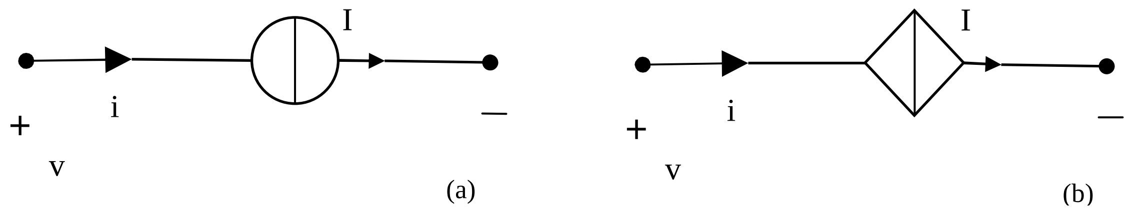


Figura 14. Generatore di corrente: (a) indipendente, (b) pilotato.

Il simbolo del generatore indipendente di corrente è indicato nella figura 14a, quello del generatore di corrente pilotato (o dipendente) nella figura 14b; nel primo caso la corrente impressa del generatore (I) è una funzione nota del tempo, mentre nel secondo dipende da un'altra grandezza che può essere la corrente (generatore di corrente pilotato in corrente: GCPC) o la tensione (generatore di corrente pilotato in tensione: GCPT) di un altro componente del circuito. La freccia vicino al simbolo del generatore di corrente indica il verso della corrente impressa. Con riferimento ai versi positivi delle grandezze indicati nella figura, l'equazione costitutiva del generatore di corrente è la seguente:

$$i = I \tag{27}$$

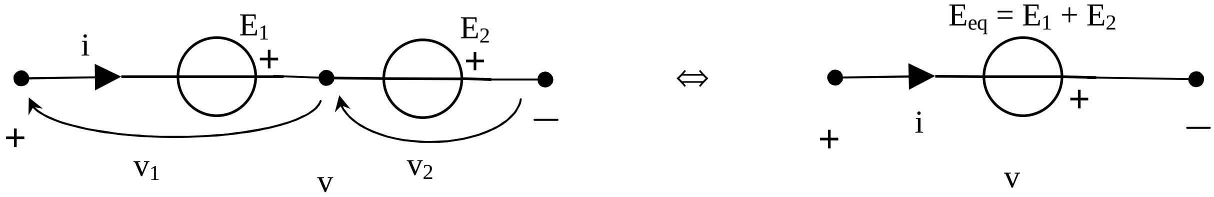
In figura sono illustrati i GCPT (caratteristica: $i = g\ v_p$) e GCPC (caratteristica: $i = h\ i_p$) lineari.

L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

$$p = v\ i = v\ I \tag{28}$$

La potenza elettrica assorbita risulta quindi positiva o negativa a seconda che la tensione ai terminali del generatore abbia verso associato o non associato (secondo la convenzione degli utilizzatori) rispetto a quello della corrente impressa. Il generatore indipendente di corrente è quindi in grado di assorbire od erogare, in dipendenza dalle condizioni di lavoro del circuito, una potenza elettrica di valore qualsiasi, mantenendo comunque inalterato il valore della corrente che lo attraversa. Il generatore indipendente di corrente è un componente controllato in tensione. Il generatore dipendente di corrente non è un componente controllato né in tensione né in corrente.

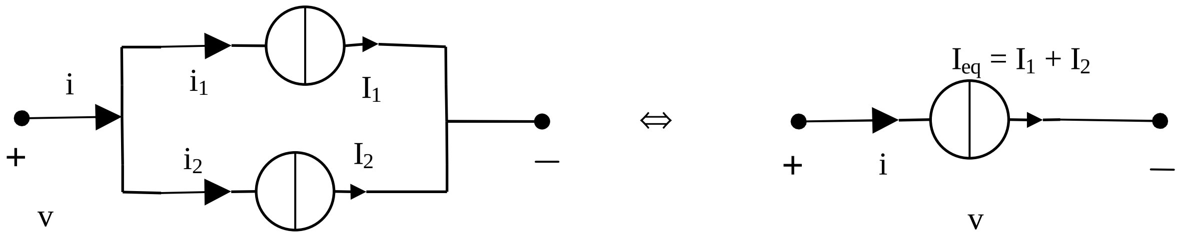
Le nozioni di serie e parallelo sono applicabili a ogni bipolo, quindi anche ai generatori. In figura 15.a è illustrata la serie di due generatori indipendenti di tensione. Confrontando le caratteristiche si ottiene l'equivalenza con un solo generatore indipendente di tensione avente una tensione impressa (equivalente) pari alla somma delle due tensioni impresse. La relazione ottenuta è generalizzabile ad un numero qualsiasi di generatori indipendenti di tensione in serie (per definizione tutti percorsi dalla stessa corrente): $E_{eq} = \Sigma_k E_k$.



$$v = v_1 + v_2 = -E_1 - E_2 = -(E_1 + E_2) = -E_{eq}$$

Figura 15.a Generatori di tensione indipendenti collegati in serie.

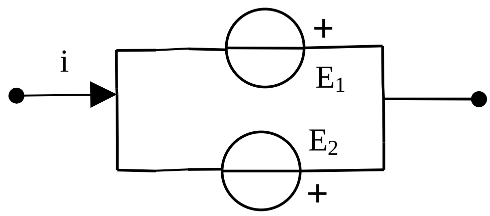
Analogamente, in figura 15.b è illustrato il parallelo di due generatori indipendenti di corrente. Confrontando le caratteristiche si ottiene l'equivalenza con un solo generatore indipendente di corrente avente una corrente impressa (equivalente) pari alla somma delle correnti impresse. La relazione ottenuta è generalizzabile ad un numero qualsiasi di generatori indipendenti di corrente in parallelo (per definizione tutti soggetti alla stessa tensione): $I_{eq} = \Sigma_k I_k$.

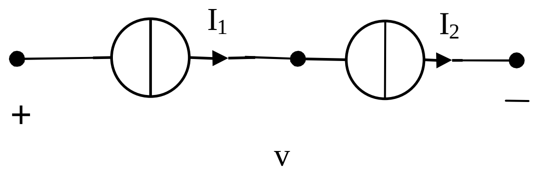


$$i = i_1 + i_2 = I_1 + I_2 = I_{eq}$$

Figura 15.b   Generatori di corrente indipendenti collegati in parallelo.

Le equivalenze mostrate nelle figure 15.a e 15.b mostrano come la procedura per determinare il bipolo equivalente di una serie o di un parallelo sia sempre lo stessa: sostituzione delle caratteristiche $f_1(v_1, i_1) = 0$ ed $f_1(v_2, i_2) = 0$ dei bipoli nella opportuna LK (LKT per la serie e LKC per il parallelo) ed identificazione del componente equivalente dalla sua caratteristica $f(v, i) = 0$. Tuttavia, questa procedura non porta sempre alla determinazione di un componente equivalente. A parte il caso in cui non esista un componente elementare corrispondente alla caratteristica $f(v, i) = 0$[(o)], si possono ottenere inconsistenze ovvero **circuiti inammissibili** (o patologici). Ad esempio, se si cerca di porre in parallelo due generatori indipendenti di tensione o di porre in serie due generatori indipendenti di corrente con grandezze impresse diverse[(oo)] le LK sono violate, come mostrato in figura. Pertantoi due schemi rappresentati, seguendo la definizione data precedentemente, non sono circuiti elettrici.[(ooo)]





Applicando la LKT alla maglia costituita dai due generatori si ha: $0 = E_2 - E_1 \neq 0$.

La LKT è violata: il circuito è inammissibile.

Applicando la LKC al nodo in comune ai due generatori si ha: $0 = I_2 - I_1 \neq 0$.

La LKC è violata: il circuito è inammissibile.

Generatori reali

Un generatore di tensione reale può essere modellato elettricamente mediante lo schema illustrato nella figura 15, costituito da un resistore e da un generatore indipendente di tensione collegati in serie. Il generatore di tensione permette di simulare la trasformazione energetica (ad esempio per le celle elettrochimiche da energia chimica in energia elettrica e viceversa) che avviene all'interno del dispositivo reale; la tensione impressa E_0 è pari alla tensione ai terminali del bipolo durante il funzionamento a vuoto (quando non eroga corrente). La resistenza R del resistore permette di simulare la dissipazione di potenza elettrica in potenza termica che viene ceduta all'ambiente circostante. La

---

[(o)] Ad esempio, la serie di un resistore lineare (con resistenza R) e di un induttore (con induttanza L). In tal caso si ha: $v = v_1 + v_2 = Ri + L\, di/dt$ e la caratteristica $f(v, i) = 0$ così definita non corrisponde a nessun componente elementare.

[(oo)] Se le grandezze impresse sono uguali i circuiti sono ammissibili (come si deduce immediatamente, due generatori indipendenti di tensione con la stessa tensione impressa E in parallelo sono equivalenti ad un solo generatore indipendente di tensione con tensione impressa equivalente E ed, analogamente, due generatori indipendenti di corrente con la stessa corrente impressa I in serie sono equivalenti ad un solo generatore indipendente di corrente con corrente impressa equivalente I) ma non sono univocamente solubili [vedi seguito].

[(ooo)] Questa situazione è solitamente il risultato di un eccesso di idealizzazione nel modello del dispositivo fisico studiato. Ad esempio, è certamente possibile collegare in serie o in parallelo due generatori reali. In tal caso tuttavia è essenziale considerare le resistenze interne (spesso trascurate in prima approssimazione) per evitare le inconsistenze nelle LK.

caratteristica tensione-corrente del bipolo di figura 16.a è illustrata in figura 16.b. Il generatore di tensione reale è un componente controllato sia in tensione che in corrente.

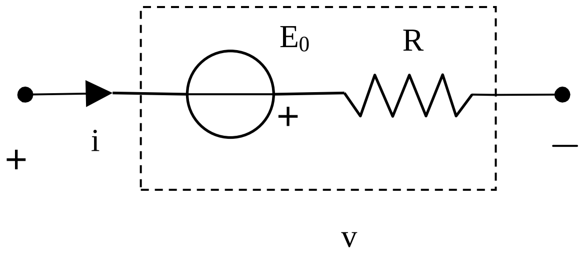


Figura 16.a Modello circuitale del generatore reale.

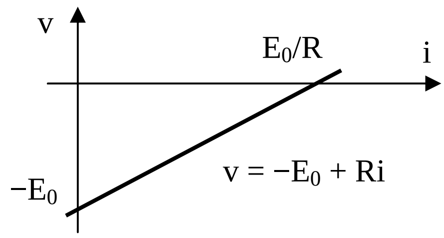


Figura 16.b Caratteristica del generatore reale.

Si può rappresentare il generatore reale anche tramite un diverso schema circuitale. A tal fine è sufficiente esplicitare la corrente in funzione della tensione. A tal fine posto $G = 1/R$ ed $I_0 = E_0/R$ si ha:

$$i = v/R + E_0/R = Gv + I_0$$

In questo modo la corrente entrante nel bipolo è interpretabile come la somma di due termini (ovvero di due correnti su due rami in parallelo). Il primo termine, che è proporzionale alla tensione, è un resistore di conduttanza G; il secondo termine, che è noto, è un generatore di corrente indipendente.

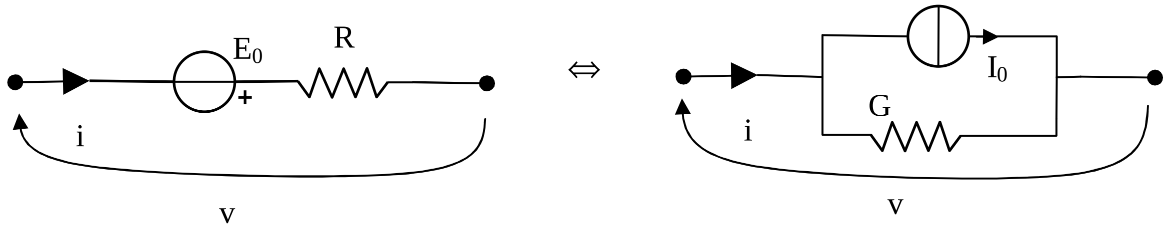


Figura 17. Circuiti equivalenti del generatore reale.

L'equivalenza illustrata in figura 17 è possibile, ovviamente, solo se sono soddisfatte le condizioni $G = 1/R$ ed $I_0 = E_0/R$ (il caso $R = 0$ è quindi escluso) o le loro inverse $R = 1/G$ ed $E_0 = I_0/G$ (il caso $G = 0$ è quindi escluso). L'equivalenza tra bipoli assicura (per definizione) l'uguaglianza delle caratteristiche e quindi anche la potenza assorbita dai due bipoli è la stessa:

$$p = v\,i = Ri^2 - E_0 i = (Gv + I_0)^2/G - (Gv + I_0)\,I_0/G = Gv^2 + 2vI_0 + I_0^2/G - vI_0 - I_0^2/G = Gv^2 + vI_0$$

[Si noti tuttavia che la potenza assorbita dal resistore di resistenza R nello schema di sinistra ($p_R = Ri^2$) è generalmente diversa dalla potenza assorbita dal resistore di conduttanza G nello schema di destra ($p_G = Gv^2$). Questo è particolarmente evidente se si considerano i bipoli a vuoto ($i = 0$): nel bipolo a sinistra $v = -E_0$, $p_R = 0$, in quello di destra $v = -I_0/G = -E_0$, $p_G = I_0^2/G$].

2.6 Diodo ideale

Il simbolo del diodo ideale è indicato nella figura 18.a. Con i versi indicati in figura, la caratteristica del diodo ideale è rappresentata, nel piano tensione - corrente, dal semiasse negativo delle tensioni e dal semiasse positivo delle correnti (vedi figura 18.b): se la tensione anodo (A) - catodo (K) è negativa, si dice che il diodo è interdetto e la corrente è nulla; viceversa, se il diodo è percorso da corrente da A a K (diodo in conduzione) la tensione è nulla.

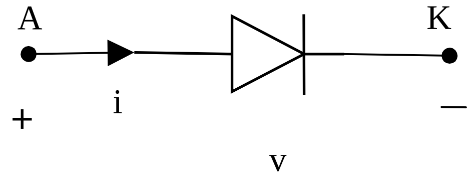


Figura 18.a Diodo ideale

Il diodo ideale non è controllato né in tensione (quando la corrente è nulla la tensione può assumere tutti i valori negativi) né in corrente (quando la tensione è nulla la corrente può assumere tutti i valori positivi). A seconda quindi che il diodo ideale sia in conduzione od interdetto, può essere considerato rispettivamente un corto circuito od un circuito aperto [Il diodo ideale quindi è un componente non-lineare che tuttavia è lineare a tratti]; in ogni caso la potenza elettrica assorbita dal diodo ideale è nulla.

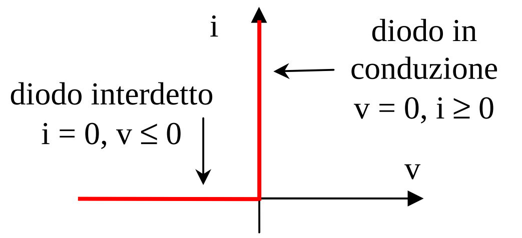
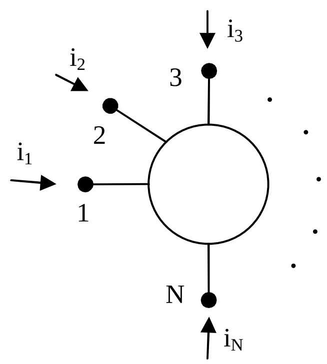


Figura 18.b Caratteristica del diodo ideale, purchè i versi di tensione e corrente siano scelti come in figura 18.a (la caratteristica dipende dalla scelta dei versi).

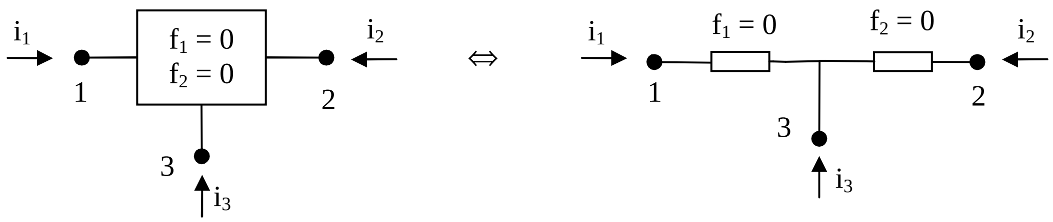
N-polo

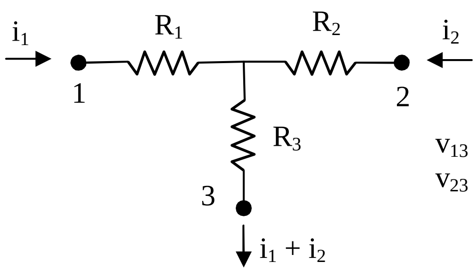
In generale i componenti a N terminali (N-poli) sono caratterizzati da N−1 relazioni (caratteristiche o equazioni costitutive) tra le correnti e le tensioni definibili ai terminali. Per definire univocamente i riferimenti, si consideri il terminale N come terminale di riferimento per le tensioni e si considerino come versi positivi delle correnti quelli entranti nel componente:

$$f_n\left(i_1, \ldots, i_N, v_{1N} \ldots, v_{N-1,N}\right) = 0 \text{, con n =1, ..., N−1}$$



Naturalmente, dato che la LKC impone che la somma di tutte le correnti è nulla, è sempre possibile esprimere una di esse come opposto della somma di tutte le altre, cioè esprimere le caratteristiche in funzione di solo N−1 correnti. Per ottenere un circuito equivalente costituito solo da bipoli (ma non è l'unico modo) è sufficiente collegare tutte le coppie di terminali (k, N) con k =1, ..., N−1 ad un bipolo con caratteristica $f_k = 0$ (infatti, <u>due componenti sono equivalenti se le loro caratteristiche sono uguali</u>). In figura è mostrato il circuito equivalente costituito solo da bipoli di un tripolo generico costruito in questo modo. Se si considera uno specifico componente è possibile anche utilizzare componenti elementari. Ad esempio, in figura è mostrato il circuito equivalente di una stella di resistori.

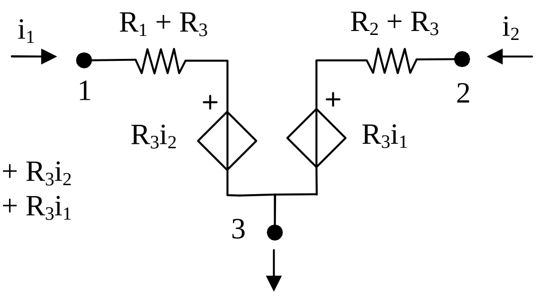




⇔

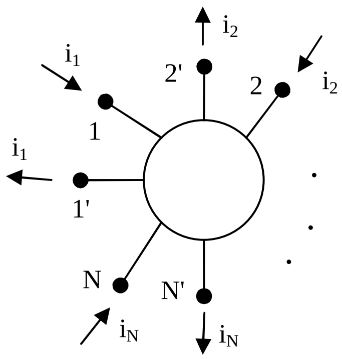
$v_{13} = (R_1 + R_3)i_1 + R_3 i_2$

$v_{23} = (R_2 + R_3)i_2 + R_3 i_1$



N-porte

Un componente a 2N terminali in cui sia possibile identificare N coppie di terminali con le stesse correnti entranti/uscenti (condizioni di porta) è caratterizzato da N relazioni (caratteristiche o equazioni costitutive) tra le correnti e le tensioni definibili ai terminali di ogni porta, identificati come 1-1', ..., N-N'. Per definire univocamente i riferimenti, si considerino i terminali 1, ..., N come terminali di riferimento positivi per le tensioni e si considerino i versi associati per le correnti:

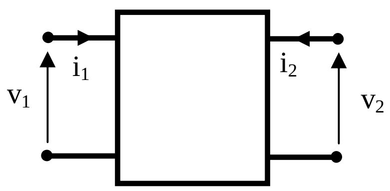


$$f_n\left(i_1, \ldots, i_N, v_{11'} \ldots, v_{N,N'}\right) = 0, \text{ con } n = 1, \ldots, N$$

Infatti considerando l'N-porte come un 2N-polo, esso sarebbe definito da 2N−1 caratteristiche; tuttavia N−1 di esse sono condizioni di porta (la coppia di terminali N-N' è automaticamente una porta se lo sono tutte le altre, grazie alla LKC). Per ottenere un circuito equivalente costituito solo da bipoli (ma non è l'unico modo) è sufficiente collegare ogni porta k (con k =1, ..., N) ad un bipolo con caratteristica $f_k = 0$.

Doppi bipoli (2 porte)

Nel seguito vengono descritte e discusse le caratteristiche e le proprietà di alcuni dei doppi bipoli di impiego più diffuso. Un doppio bipolo è definito da due relazioni caratteristiche (o relazioni costitutive) che possono essere espresse in funzione delle tensioni e delle correnti definite ai terminali delle porte (si noti che le tensioni e le correnti hanno un solo indice, quello della porta):



Caratteristiche di un doppio bipolo:

$$\begin{cases} f_1(i_1, v_1, i_2, v_2) = 0 \\ f_2(i_1, v_1, i_2, v_2) = 0 \end{cases}$$

Limitandoci ai doppi bipoli lineari, omogenei e tempo-invarianti, le relazioni costitutive (lineari, a coefficienti costanti e omogenee, come per i generatori pilotati lineari GTPT, GTPC, GCPT, e GCPC), possono essere espresse come a destra (le due caratteristiche devono essere linearmente indipendenti, ovvero il rango della matrice dei coefficienti deve essere 2). Questa forma delle caratteristiche è detta <u>rappresentazione implicita del doppio bipolo</u>

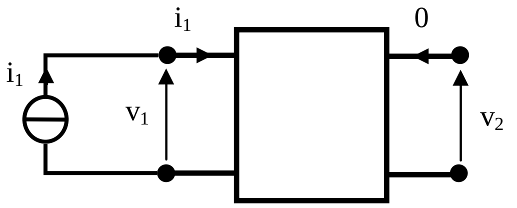
Caratteristiche di un doppio bipolo lineare, omogeneo e tempo-invariante:

$$\begin{cases} a_{11}i_1 + a_{12}v_1 + a_{13}i_2 + a_{14}v_2 = 0 \\ a_{21}i_1 + a_{22}v_1 + a_{23}i_2 + a_{24}v_2 = 0 \end{cases}$$

Si definisce <u>rappresentazione esplicita</u> (o semplicemente rappresentazione) del doppio bipolo una versione delle equazioni costitutive in cui due variabili sono espresse esplicitamente in funzione delle altre due. Sono possibili sei rappresentazione (anche se, per un specifico doppio bipolo, alcune di esse possono non essere ammissibili). Ciascuna rappresentazione impone due relazioni tra le quattro variabili i_1, i_2, v_1 e v_2. Sotto opportune condizioni tali relazioni possono essere invertiti algebricamente e due qualsiasi delle variabili possono essere espresse in funzione delle altre due. A seconda del tipo di rappresentazione si definisce una matrice 2×2 che permette di calcolare le variabili dipendenti a partire dalle variabili indipendenti. Le matrici [R], [G], [H], [H'], [T] e [T'] prendono il nome rispettivamente di matrice di resistenza, di conduttanza, ibrida diretta, ibrida inversa, di trasmissione diretta, di trasmissione inversa.

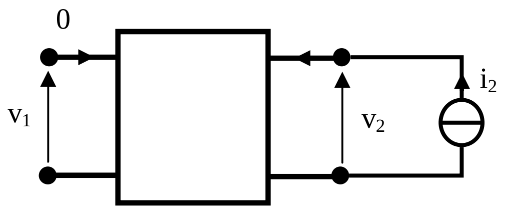
Rappresentazione		Variabili Dipendenti	Variabili Indipendenti
Controllata in corrente (tramite matrice [R])	$\begin{cases} v_1 = r_{11} i_1 + r_{12} i_2 \\ v_2 = r_{21} i_1 + r_{22} i_2 \end{cases}$	v_1, v_2	i_1, i_2
Controllata in tensione (tramite matrice [G])	$\begin{cases} i_1 = g_{11} v_1 + g_{12} v_2 \\ i_2 = g_{21} v_1 + g_{22} v_2 \end{cases}$	i_1, i_2	v_1, v_2
Ibrida diretta (tramite matrice [H])	$\begin{cases} v_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \\ i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \end{cases}$	v_1, i_2	i_1, v_2
Ibrida inversa (tramite matrice [H'])	$\begin{cases} i_1 = h'_{11} v_1 + h'_{12} i_2 \\ v_2 = h'_{21} v_1 + h'_{22} i_2 \end{cases}$	i_1, v_2	v_1, i_2
Trasmissione diretta (tramite matrice [T])	$\begin{cases} v_1 = t_{11} v_2 - t_{12} i_2 \\ i_1 = t_{21} v_2 - t_{22} i_2 \end{cases}$	v_1, i_1	v_2, $-i_2$
Trasmissione inversa (tramite matrice [T'])	$\begin{cases} v_2 = t'_{11} v_1 - t'_{12} i_1 \\ i_2 = t'_{21} v_1 - t'_{22} i_1 \end{cases}$	v_2, i_2	v_1, $-i_1$

Dato quindi un doppio bipolo lineare omogeneo e scelta una rappresentazione, i coefficienti di matrice si possono calcolare specializzando le caratteristiche (annullando una delle variabili indipendenti). Ad esempio, per calcolare i coefficienti della matrice [R] è sufficiente risolvere i due circuiti in figura:



1) posto $i_2 = 0$, il primario è alimentato con una corrente i_1 arbitraria. Risolto il circuito per determinare v_1 e v_2, si ha quindi:

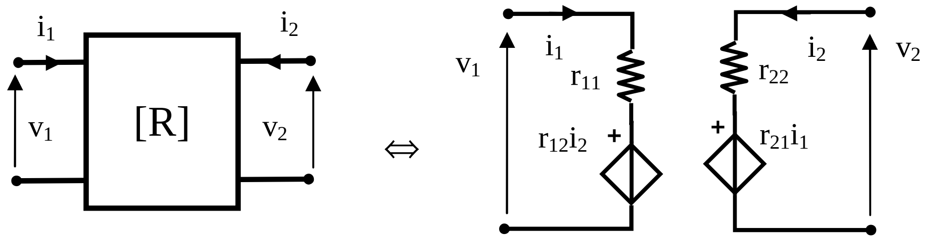
$$r_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{i_2=0} \quad , \quad r_{21} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{i_2=0}$$

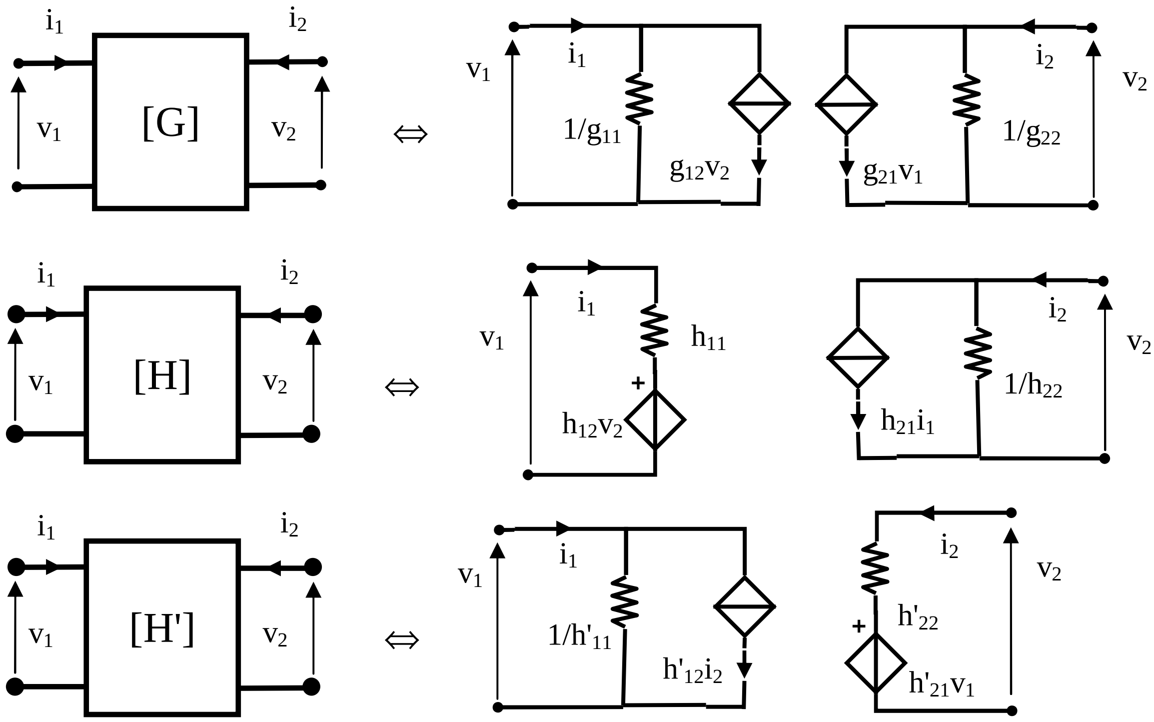


2) posto $i_1 = 0$, il secondario è alimentato con una corrente i_2 arbitraria. Risolto il circuito per determinare v_1 e v_2, si ha quindi:

$$r_{12} = \left.\frac{v_1}{i_2}\right|_{i_1=0} \quad , \quad r_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{i_1=0}$$

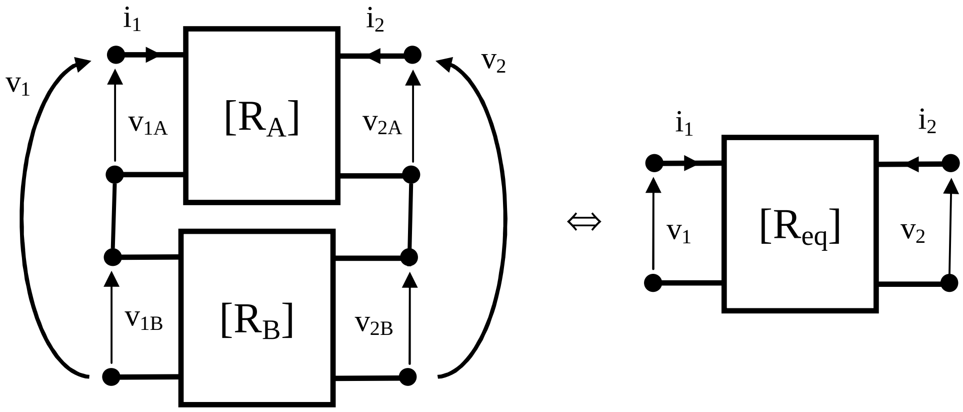
Le rappresentazioni di un doppio bipolo tramite matrice di resistenze, di conduttanze, ibrida diretta ed ibrida inversa possono essere schematizzate anche tramite un circuito equivalente. (i resistori nei seguenti quattro schemi sono definiti in termini di resistenza)





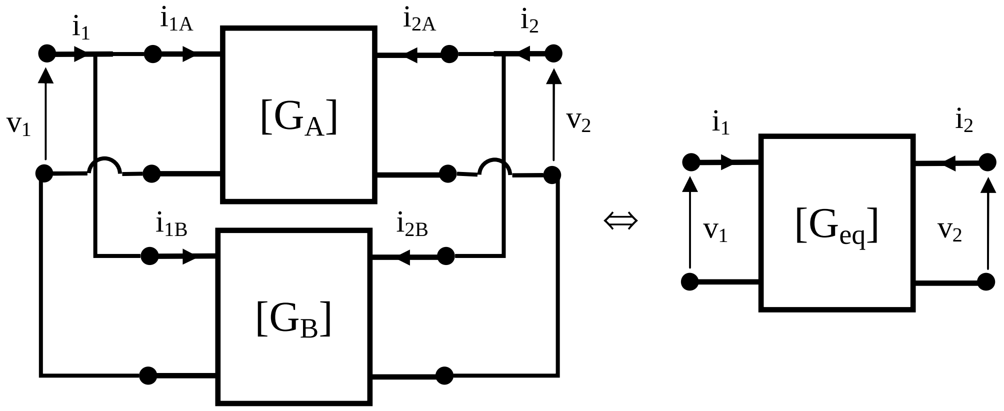
Due doppi bipoli A e B si dicono in serie quando sia le porte di ingresso sia quelle di uscita sono collegate in serie (ovvero la stessa corrente i_1 circola sui primari e la stessa corrente i_2 circola sui secondari). Tale collegamento da luogo ad un doppio bipolo equivalente la cui matrice delle resistenze è data dalla somma delle matrici delle resistenze di A e di B: $[R_{eq}] = [R_A] + [R_B]$. Infatti:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{1A} \\ v_{2A} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_{1B} \\ v_{2B} \end{Bmatrix} = [R_A]\begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} + [R_B]\begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} = ([R_A]+[R_B])\begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} = [R_{eq}]\begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix}$$



Due doppi bipoli A e B si dicono in parallelo quando sia le porte di ingresso che quelle di uscita sono collegate in parallelo (ovvero i primari sono soggetti alla stessa tensione v_1 ed i secondari sono soggetti alla stessa tensione v_2). Tale collegamento da luogo ad un doppio bipolo equivalente la cui matrice delle conduttanze è data dalla somma delle matrici delle conduttanze di A e di B: $[G_{eq}] = [G_A] + [G_B]$. Infatti:

$$\begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i_{1A} \\ i_{2A} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i_{1B} \\ i_{2B} \end{Bmatrix} = [G_A]\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} + [G_B]\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = ([G_A]+[G_B])\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = [G_{eq}]\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

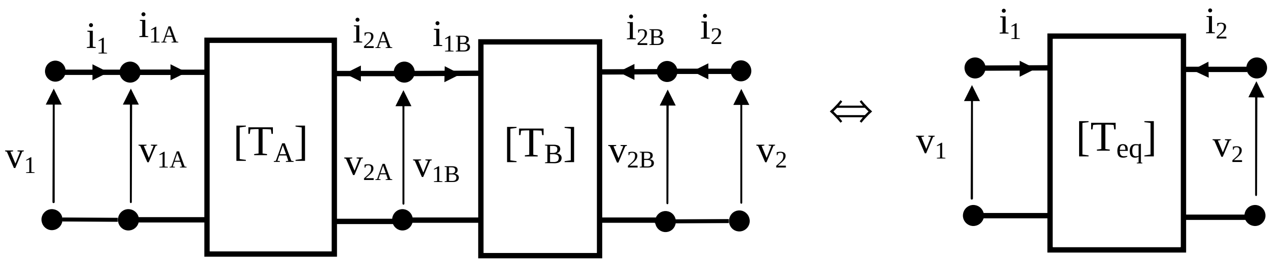


Due doppi bipoli A e B si dicono in serie-parallelo quando porte di ingresso sono collegate in serie e quelle di uscita sono collegate in parallelo. Tale collegamento da luogo ad un doppio bipolo equivalente la cui matrice ibrida diretta è data dalla somma delle singole matrici ibride dirette, ossia: $[H_{eq}] = [H_A] + [H_B]$. La dimostrazione è analoga ai casi precedenti.

Due doppi bipoli A e B si dicono in parallelo-serie quando le porte di ingresso sono collegate in parallelo e quelle di uscita sono collegate in serie. Tale collegamento da luogo ad un doppio bipolo equivalente la cui matrice ibrida inversa è data dalla somma delle singole matrici ibride inverse, ossia: $[H'_{eq}] = [H'_A] + [H'_B]$. La dimostrazione è analoga ai casi precedenti.

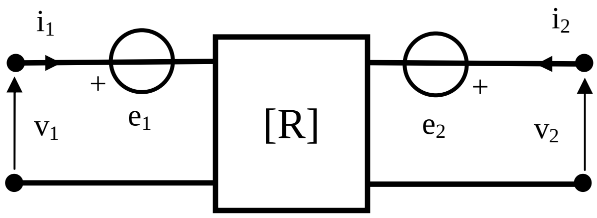
Due doppi bipoli A e B si dicono in cascata quando la porta di ingresso dell'uno è collegata a quella di uscita dell'altro. Tale collegamento da luogo ad un doppio bipolo equivalente la cui matrice di trasmissione diretta è data dal prodotto delle singole matrici di trasmissione: $[T_{eq}] = [T_A]\,[T_B]$. Infatti:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{1A} \\ i_{1A} \end{Bmatrix} = [T_A]\begin{Bmatrix} v_{2A} \\ -i_{2A} \end{Bmatrix} = [T_A]\begin{Bmatrix} v_{1B} \\ i_{1B} \end{Bmatrix} = [T_A][T_B]\begin{Bmatrix} v_{2B} \\ -i_{2B} \end{Bmatrix} = [T_A][T_B]\begin{Bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{Bmatrix} = [T_{eq}]\begin{Bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{Bmatrix}$$

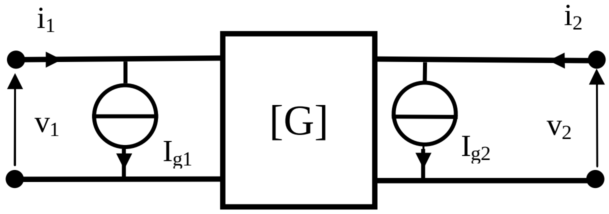


Per quanto riguarda i doppi bipoli non omogenei, se sono rappresentabili in tramite matrice di resistenze, di conduttanze, ibrida diretta od ibrida inversa i termini noti possono essere considerati come un generatore indipendente di tensione in serie alla porta (se la variabile dipendente è una tensione) o come un generatore indipendente di corrente in parallelo alla porta (se la variabile dipendente è una corrente):

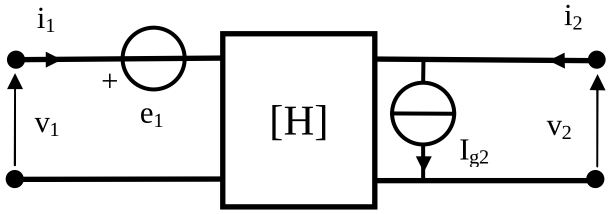
$$\begin{cases} v_1 = e_1 + r_{11} i_1 + r_{12} i_2 \\ v_2 = e_2 + r_{21} i_1 + r_{22} i_2 \end{cases}$$



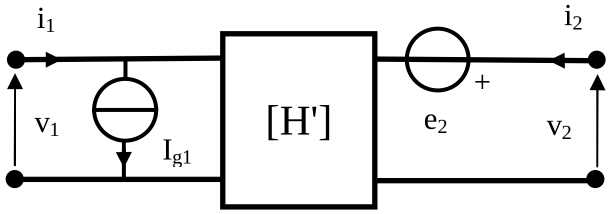
$$\begin{cases} i_1 = I_{g1} + g_{11}v_1 + g_{12}v_2 \\ i_2 = I_{g2} + g_{21}v_1 + g_{22}v_2 \end{cases}$$



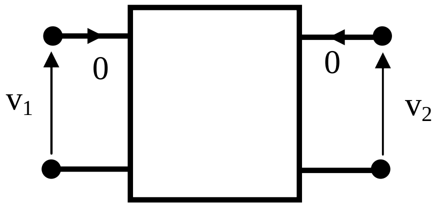
$$\begin{cases} v_1 = e_1 + h_{11}i_1 + h_{12}v_2 \\ i_2 = I_{g2} + h_{21}i_1 + h_{22}v_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} i_1 = I_{g1} + h'_{11}v_1 + h'_{12}i_2 \\ v_2 = e_2 + h'_{21}v_1 + h'_{22}i_2 \end{cases}$$



Dato quindi un doppio bipolo lineare non omogeneo e scelta una rappresentazione, i termini noti si possono calcolare specializzando le caratteristiche (annullando le variabili indipendenti). Ad esempio, per calcolare le tensioni e_1 ed e_2 in un doppio bipolo controllato in corrente è sufficiente risolvere il circuito in figura:



Posto $i_1 = i_2 = 0$, e risolto il circuito per determinare v_1 e v_2, si ha quindi:

$$e_1 = v_1\big|_{i_1=i_2=0} \quad , \qquad e_2 = v_2\big|_{i_1=i_2=0}$$

2.7 Il trasformatore ideale

Il trasformatore ideale è un doppio bipolo (ovvero un quadripolo in cui è possibile identificare una coppia di terminali in cui entra ed esce la stessa corrente) definito dalle seguenti relazioni lineari:

$$v_1 = K\, v_2 \qquad (29.a)$$

$$i_2 = -\, K\, i_1 \qquad (29.b)$$

La costante K è detta rapporto di trasformazione [Il trasformatore ideale ammette quindi le rappresentazioni tramite matrice ibrida diretta, ibrida inversa, di trasmissione diretta e di trasmissione inversa. Non sono invece possibili le rappresentazioni tramite matrice di resistenze o di conduttanze.]. Il simbolo del trasformatore ideale è indicato nella figura 19. Si noti che una coppia di terminali è segnata con un punto, indicando quindi i versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti per cui le (29) sono corrette. In figura 19 è mostrato inoltre uno dei possibili circuiti equivalenti del trasformatore ideale. Si noti anche che, poiché il trasformatore ideale è definito dalle (29), le relazioni tra tensioni e correnti a primario e secondario sono valide in ogni condizione (incluso quindi il regime stazionario). Il trasformatore ideale è indicato in letteratura anche con altri simboli, tuttavia, nel seguito si utilizzerà sempre il simbolo di figura 19, dato che il simbolo alternativo è simile a quello che rappresenta gli induttori accoppiati (che saranno introdotti più avanti).

Caratteristiche

$$\begin{cases} \dfrac{v_1}{v_2} = K \\ \dfrac{i_1}{i_2} = -\dfrac{1}{K} \end{cases}$$

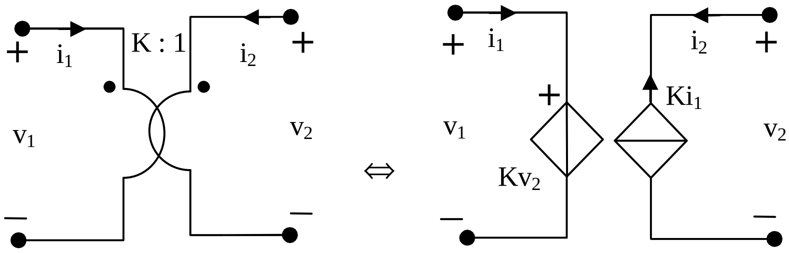


Figura 19 - Trasformatore ideale e circuito equivalente.

La potenza assorbita dal trasformatore ideale è nulla; infatti, con riferimento ai versi di riferimento delle tensioni e delle correnti definiti in figura 18, si ha

$$p(t) = v_1(t)\, i_1(t) + v_2(t)\, i_2(t) = \{K\, v_2(t)\}\{-i_2(t)/K\} + v_2(t)\, i_2(t) = 0$$

Quindi la somma delle potenze assorbite a primario e secondario è complessivamente nulla, ovvero la potenza assorbita a primario dal trasformatore ideale ($p_1 = v_1\, i_1$) risulta in ogni istante uguale a quella erogata al secondario ($p_2 = -\, v_2\, i_2$). Anche se non assorbe potenza, il trasformatore ideale muta i parametri (tensione e corrente) con cui la energia elettrica viene assorbita a primario ed erogata a secondario: la tensione viene ridotta (od aumentata) di un fattore pari al rapporto di trasformazione del trasformatore K mentre la corrente viene aumentata (o diminuita) dello stesso fattore.

Quando a secondario di un trasformatore ideale è collegato un resistore di resistenza R, il primario è equivalente a un resistore di resistenza equivalente K^2R. Tale equivalenza è illustrata nella figura 19 e prende il nome di riduzione da secondario a primario. La dimostrazione è immediata:

$$v_1(t) = K\, v_2(t) = K\,[-R\, i_2(t)] = -KR\,[-K\, i_1(t)] = K^2 R\, i_1(t) = R_{eq}\, i_1(t)$$

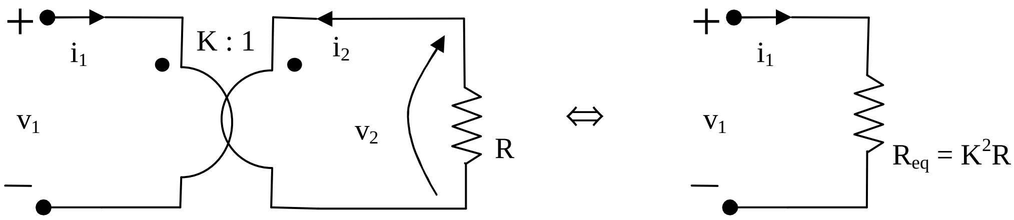


Figura 19.a - Riduzione da secondario a primario di un resistore.

Naturalmente si può effettuare anche la riduzione da primario a secondario. Analogamente al caso precedente si ha:

$$v_2(t) = (1/K)\, v_1(t) = (1/K)\,[-R\, i_1(t)] = -(R/K)\,[(-1/K)\, i_2(t)] = (R/K^2)\, i_2(t) = R_{eq}\, i_2(t)$$

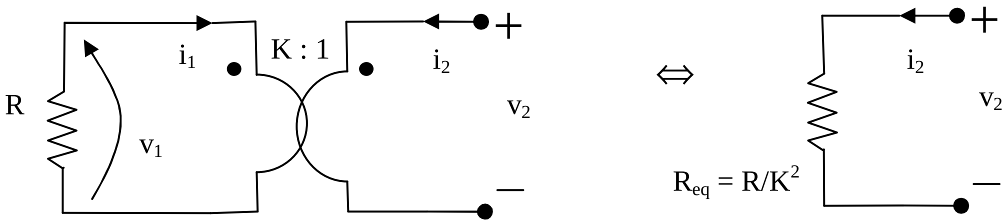


Figura 19.b - Riduzione da primario a secondario di un resistore.

Se a secondario di un trasformatore ideale è collegato un generatore reale con tensione impressa E e resistenza R, il primario è equivalente a un generatore reale con tensione impressa KE e resistenza equivalente K^2R. La dimostrazione è immediata:

$$v_1(t) = K\, v_2(t) = K\,[E - R\, i_2(t)] = KE - KR\,[-K\, i_1(t)] = KE + K^2 R\, i_1(t) = E_{eq} + R_{eq}\, i_1(t)$$

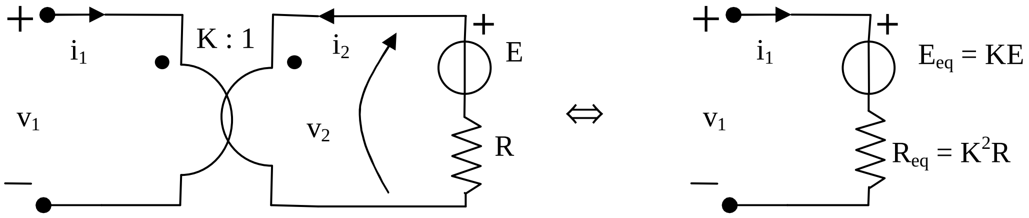


Figura 20 - Riduzione da secondario a primario di un generatore reale.

2.8 Amplificatore Operazionale ideale

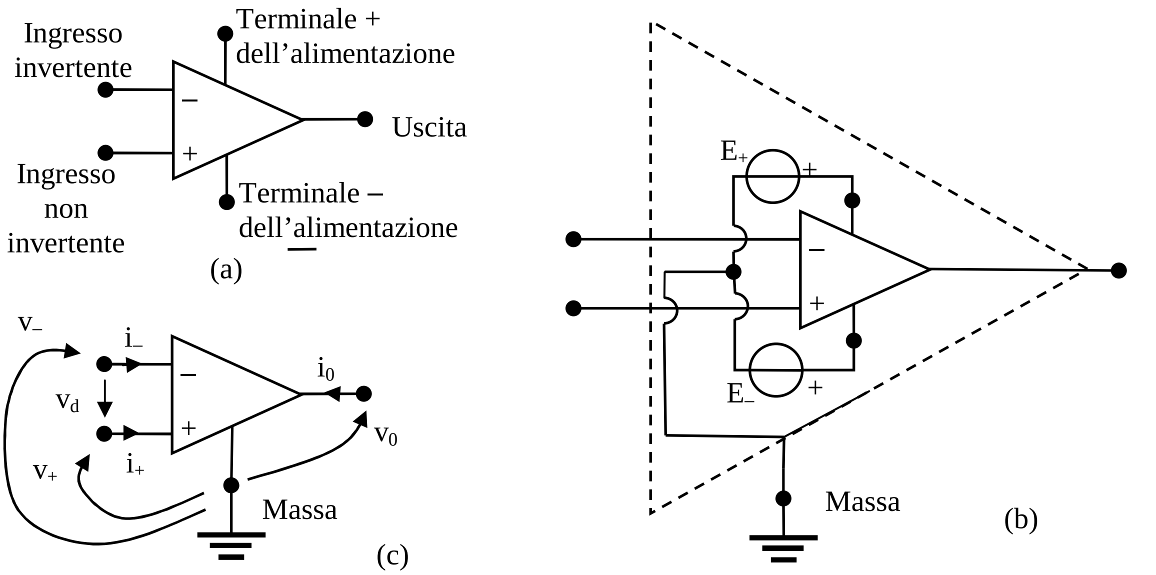


Figura 21 - Amplificatore operazionale [Un simbolo di A.O. che è molto utilizzato in pratica mostra solo tre terminali, omettendo il terminale di massa. Ciò è dovuto al fatto che il terminale di massa in figura 21.b non esiste fisicamente come piedino ma piuttosto viene creato esternamente tramite l'alimentazione. Si è preferito evidenziare esplicitamente il terminale di massa perché altrimenti l'applicazione della LKC avrebbe fornito la relazione <u>errata</u> $i_{-} + i_{+} + i_0 = 0$.].

L'amplificatore operazionale (A.O.) è un componente attivo (cioè in grado di erogare potenza), progettato per essere ottenere specifiche operazioni di elaborazione delle variabili circuitali (segnale). Alcuni A.O. possiedono più di sette terminali. Tuttavia, per la maggior parte delle applicazioni solo i cinque terminali indicati nel simbolo di figura 21.a sono essenziali (ingresso invertente, ingresso non invertente, uscita, terminale + dell'alimentazione, terminale – dell'alimentazione). I terminali aggiuntivi sono solitamente collegati ad alcuni circuiti esterni di compensazione per migliorare le prestazioni dell'A.O.. Le alimentazioni vengono utilizzate per polarizzare l'A.O.; in altri termini, le alimentazioni consentono l'instaurarsi di certe condizioni che sono essenziali al corretto funzionamento dell'A.O.. Dopo il collegamento dell'alimentazione (e dopo che il circuito di compensazione è stato collegato ad ogni terminale aggiuntivo) solo quattro terminali restano disponibili per i collegamenti esterni. Quindi, dal punto di vista circuitale, l'A.O. è un dispositivo a quattro terminali. Tale dispositivo è tracciato all'interno del triangolo tratteggiato di figura 21.b e sarà nel seguito indicato con il simbolo illustrato in figura 21.c, dove i_{-} ed i_{+} denotano rispettivamente la corrente entrante dal'ingresso invertente e da quello non invertente dell'A.O. Analogamente v_{+}, v_{-} e v_0 denotano la tensione rispetto a massa dei terminali +, – e uscita, rispettivamente. La tensione $v_d = v_{+} - v_{-}$ è detta *tensione d'ingresso differenziale*.

Per ottenere un'esatta caratterizzazione di un A.O. sarebbe necessario analizzare l'intero dispositivo, la cui struttura è molto complessa. Tuttavia per le applicazioni a bassa frequenza, le correnti e le tensioni ai terminali dell'A.O. obbediscono alle seguenti relazioni approssimate:

$$\begin{cases} i_{-} = i_{+} = 0 \\ v_0 = f(v_d) \end{cases}$$

dove $f(v_d)$ denota la *caratteristica di trasferimento* da v_d a v_0.

La caratteristica di trasferimento è una funzione dispari della tensione d'ingresso differenziale, come illustrato in figura 22. Inoltre tale funzione è piuttosto insensibile alle variazioni della corrente di uscita i_0. Si nota che:

1. in un intorno dell'origine (regione lineare) il rapporto tra tensione di uscita e tensione differenziale è circa costante: $v_0/v_d \approx A$. La costante A, tipicamente almeno 10^5, viene detta guadagno di tensione in anello aperto.
2. All'aumentare di $|v_d|$ la caratteristica satura a $v_0 = \pm E_{sat}$ (regioni di saturazione + e –)

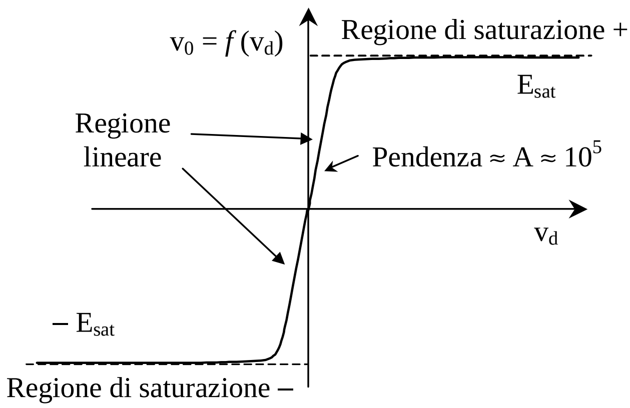


Figura 22 Caratteristica di trasferimento.

In considerazione dei valori tipici di A, la precisione si riduce poco assumendo per la caratteristica di trasferimento una rappresentazione lineare a tratti. Tale semplificazione conduce al *modello di A.O. a guadagno finito* mostrato in figura 23.a e 23.b. Si nota che la caratteristica di trasferimento è stata approssimata con tre segmenti (a meno che non sia specificato diversamente, nel seguito si farà riferimento a tale modello di A.O.) Il modello di A.O. a guadagno finito può essere descritto analiticamente come segue:

$i_- = 0$ (30.a) $\quad$ $i_+ = 0$ (31.b)

(Regione di saturazione –) $\quad v_0 = -E_{sat},\ v_d < -E_{sat}/A$ (30.c)

(Regione lineare) $\quad v_0 = A\,v_d,\quad -E_{sat}/A < v_d < E_{sat}/A$ (30.d)

(Regione di saturazione +) $\quad v_0 = E_{sat},\ v_d > E_{sat}/A$ (30.e)

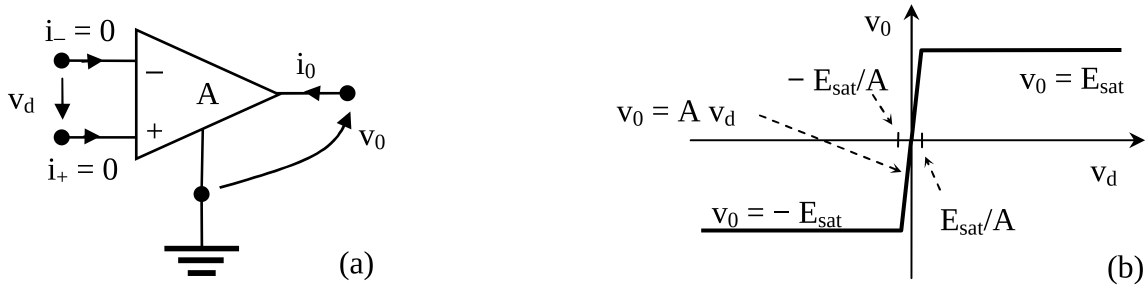


Figura 23 Modello di A.O. a guadagno finito

È molto più pratico tuttavia rappresentare ciascuna regione tramite un semplice *circuito equivalente*, come illustrato nelle figure 24.a, 24.b e 24.c. Si noti che i tre circuiti equivalenti contengono esattamente la stessa informazione della (30). In particolare, quando l'A.O. opera nella regione lineare (solitamente la condizione di progetto) si riduce a quello della figura 24.b, corrispondente alle (30.a), (30.b) e (30.d). In tal caso la tensione di uscita è proporzionale alla tensione d'ingresso differenziale in ogni istante ed il modulo della tensione di uscita è inferiore alla tensione di saturazione.

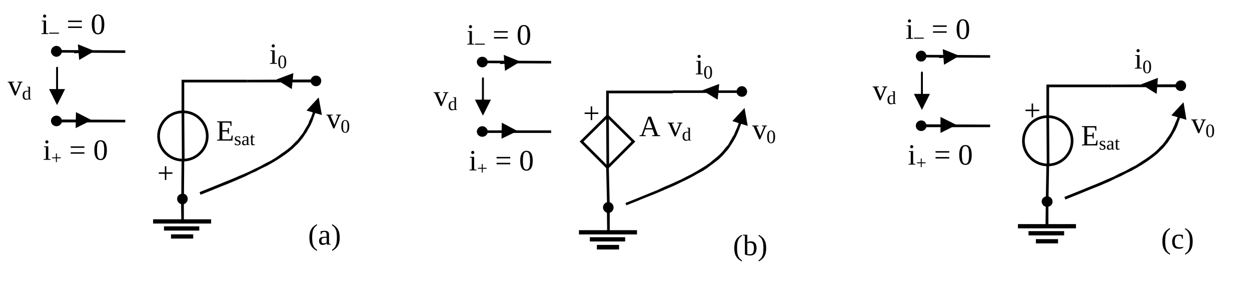


Figura 24 Circuiti equivalenti dell' A.O. a guadagno finito: (a) per la regione di saturazione negativa; (b) per la regione lineare; (c) per la regione di saturazione positiva.

In considerazione dei valori tipici di A, è spesso possibile assumere $A \to \infty$. Tale semplificazione conduce al *modello di A.O. ideale* mostrato in figura 25.a e 25.b. Per evidenziare che $A \to \infty$ nella regione lineare, si è aggiunto il simbolo ∞ all'interno del triangolo, distinguendo così il *simbolo di A.O. ideale* di figura 25.a da altri modelli. Si noti che quando l'A.O. ideale opera nella regione lineare la tensione d'ingresso differenziale è vincolata ad essere zero in ogni istante (*cortocircuito virtuale*) ed il modulo della tensione di uscita è inferiore alla tensione di saturazione [Si noti che mentre l'A.O. a guadagno finito nella regione lineare è equivalente a un GTPT, l'A.O. ideale non lo è. Tuttavia, come doppio bipolo è rappresentabile (nella regione lineare) tramite la matrice di trasmissione diretta (in questo caso nulla)].

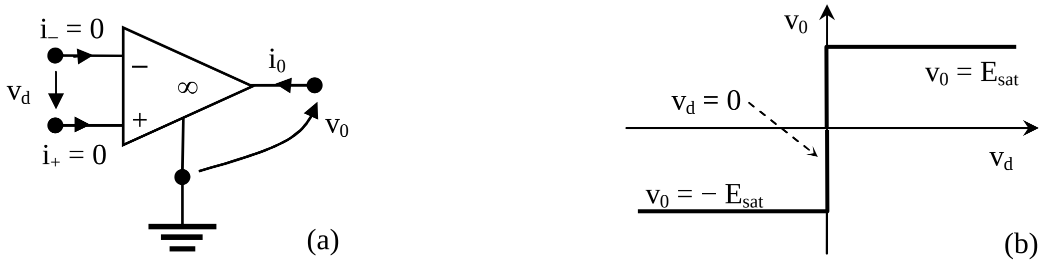


Figura 25 Modello di A.O. ideale.

Il modello di A.O. a guadagno infinito può essere descritto analiticamente come segue:

$$i_- = 0 \quad (31.a) \qquad i_+ = 0 \quad (31.b)$$

(Regione di saturazione –) $$v_0 = -E_{sat},\ v_d < 0 \quad (31.c)$$

(Regione lineare) $$v_d = 0,\quad -E_{sat} < v_0 < E_{sat} \quad (31.d)$$

(Regione di saturazione +) $$v_0 = E_{sat},\ v_d > 0 \quad (31.e)$$

3. COMPONENTI REALI

Premesso che i componenti ideali non esistono, ciò che differenzia i componenti reali, cioè quelli acquistabili a catalogo dai costruttori, dai componenti ideali (che ne rappresentano il modello più semplice) sono:

- **i limiti operativi.** Ogni componente reale può funzionare solo in certe condizioni predefinite di tensione, corrente, potenza assorbita (e temperatura). I limiti operativi specificati dal costruttore definiscono quindi i valori massimi e minimi entro i quali il componente deve funzionare. A seconda del tipo di componente possono essere presenti solo alcuni di tali limiti (ad esempio per un resistore lineare con resistenza nota è sufficiente specificare un solo limite superiore tra tensione, corrente o potenza assorbita). Se si superano i limiti operativi, il componente reale devia dal funzionamento previsto con esiti diversi (ad esempio se si supera il limite sulla tensione massima si può passare da una caratteristica lineare ad una non-lineare oppure si può avere la rottura dell'isolamento).
- **gli effetti termici.** Ogni componente reale è soggetto a perdite (ovvero alla conversione di parte della potenza elettrica assorbita o erogata in potenza termica. Tali perdite provocano nel funzionamento a regime un aumento della temperatura nel componente fino a quando non si raggiunge l'equilibrio termico con l'ambiente. I parametri che definiscono i componenti reali sono funzioni della temperatura (mediata nel volume del componente). Solitamente si suppone un andamento lineare ed è quindi sufficiente definire un coefficiente di temperatura. Ad esempio per un resistore lineare si può assumere una resistenza, alla temperatura T entro opportuni limiti, pari a $R(T) = R(T_0)\,[1 + \alpha\,(T - T_0)]$, dove T_0 è una temperatura di riferimento (di solito la temperatura ambiente). Il coefficiente di temperatura α (misurato in $°C^{-1}$) dipende dai materiali impiegati e dalla tecnologia costruttiva. A seconda del componente è possibile anche una variazione nel tempo del valore dei parametri del componente (stabilità termica) tanto più rapida quanto maggiore è la temperatura di lavoro del componente (ad esempio per i condensatori ciò è dovuto all'invecchiamento [definito nel seguito] del materiale dielettrico).
- **gli effetti parassiti.** Con questo termine si intendono tutti gli effetti diversi da quello rappresentato dal componente ideale. Sono effetti solitamente trascurabili in prima approssimazione e ti-

picamente indesiderati. In condizioni particolari, che possono essere dovute al regime di funzionamento o al circuito in cui è inserito il componente, gli effetti parassiti devono essere considerati (ad esempio la soluzione del circuito non è unica oppure l'effetto parassita diventa sempre più rilevante al crescere della frequenza [definita nel seguito]). In tal caso si fa uso di circuiti equivalenti del componente reale che sono tipicamente costituiti dal componente ideale e da uno o più componenti ideali parassiti opportunamente disposti (ad esempio, tipicamente l'induttore reale è rappresentabile come una serie induttore ideale - resistore parassita ed il condensatore reale come un parallelo condensatore ideale -resistore parassita)

Infine, a causa dei processi costruttivi e delle limitazioni imposte dai materiali usati, ogni parametro è affetto da una certa tolleranza, che esprime il massimo scostamento percentuale del valore effettivo rispetto a quello nominale (a una temperatura di riferimento specificata). Valori comuni di tolleranza vanno dal ±5% al ±20% per i tipi più diffusi, ma sono disponibili anche componenti a tolleranza del ±2% o inferiore per applicazioni di precisione. La tolleranza viene indicata dal costruttore numericamente o attraverso un codice stampato sul componente. Per alcune tipologie di componenti di uso comune (ad esempio i resistori), in accordo alle norme IEC, sono state fissate delle serie normalizzate di valori. Anche il valore nominale è indicato sul componente attraverso una sigla o un codice di riferimento.

4. UNITÀ DI MISURA SI

Il Sistema Internazionale [(*)] di grandezze ed unità di misura, nato nel 1961, è il sistema di unità di misura più diffuso.[(**)] In Italia è il sistema legalmente adottato dal 1982. Esso comprende sette *grandezze fondamentali* e le relative unità; due *grandezze complementari* e le relative unità; infine numerose *grandezze derivate* e le relative unità. Nella tabella che segue sono presentati i punti fondamentali del sistema SI per quanto riguarda le grandezze fondamentali e quelle complementari e relative unità. Si noti che la grandezza elettrica fondamentale è la corrente la cui unità di misura, l'ampere (A), è definita come la corrente costante che, percorrendo due conduttori paralleli, rettilinei di lunghezza infinita, di sezione circolare di diametro infinitesimo, posti alla distanza di 1 m l'uno dall'altro nel vuoto, produce tra i due conduttori una forza di 2×10^{-7} N su ogni metro di lunghezza.

Grandezze ed unità fondamentali SI			
Nome	Simbolo	Unità	Simbolo
Lunghezza	l	metro	m
Massa	m	kilogrammo	kg
Intervallo di tempo	t	secondo	s
Corrente elettrica	i	ampere	A
Intervallo di temperatura	θ	kelvin	K
Intensità luminosa	I	candela	cd
Quantità di materia	-	mole	mol
Grandezze ed unità complementari SI			
Angolo piano	φ	radiante	rad
Angolo solido	Ω	steradiante	sr

(*) Anche se la sigla non è ufficiale è spesso indicato anche come sistema MKSA, dalle iniziali delle unità di misura SI per lunghezza, massa, tempo e corrente (Metro, Kilogrammo, Secondo, Ampere).

(**) Solo negli Stati Uniti, in Liberia e Birmania il sistema internazionale non è stato adottato come unico o principale sistema di misurazione. Nella comunità dei fisici è ancora diffuso il sistema CGS (sistema centimetro-grammo-secondo). Nato nel 1800, il sistema CGS non ha mai avuto un utilizzo diffuso a causa degli ordini di grandezza inadatti (troppo grandi o troppo piccoli) per l'uso pratico. Nel mondo anglosassone sono ancora diffuse le unità del Sistema Britannico il cui utilizzo tuttavia è notevolmente complicato dal fatto che multipli e sottomultipli non sono in rapporto fisso (e sono diversi per le varie grandezze). Ad esempio per le lunghezze una yarda (0.914 m) corrisponde a tre piedi (1 yd = 3 ft) ed un piede corrisponde a dodici pollici (1 ft = 12 in), mentre per le masse una libbra (0.453 kg) corrisponde a sedici once (1 lb = 16 oz).

Il SI definisce multipli e sottomultipli (con un rapporto costante 10^3) che sono identificati da prefissi da apporre alle unità di misura per identificarli. Ad esempio 0.25 mF = 2.5×10^{-4} F = 250 μF.

Il SI è coerente (o razionale): ogni grandezza derivata è espressa nella sua forma elementare da un monomio di grandezze precedentemente definite e può sempre essere ridotta ad un monomio di grandezze fondamentali e complementari. Le unità relative sono derivate dalle unità delle grandezze che compaiono nel monomio di definizione; talvolta le unità stesse hanno ricevuto un nome indipendente da quelle delle unità da cui sono derivate. Nella tabella successiva sono riportate alcune grandezze derivate e le loro unità, con particolare riferimento alle grandezze utili nell'elettrotecnica.

Multipli e sottomultipli nel SI		
Prefisso	**Simbolo**	**Fattore**
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^{9}
Mega	M	10^{6}
Chilo	k	10^{3}
Milli	m	10^{-3}
Micro	μ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Pico	p	10^{-12}

Grandezza e simbolo	Unità e simbolo	Definizione
Frequenza (f)	hertz (Hz)	1 Hz = 1 s^{-1}
Lavoro (L), Energia (W)	joule (J)	1 J = 1 N·m =1 $kg·m^2/s^2$
Potenza (P)	watt (W)	1 W = 1 J/s = 1 $kg·m^2/s^3$
Carica elettrica (q, Q)	coulomb (C)	1 C = 1 A·s
Tensione elettrica (v)	volt (V)	1 V = 1 W/A = 1 $kg·m^2/(A·s^3)$
Capacità (C)	farad (F)	1 F = 1 C/V = 1 $A^2·s^4/(kg·m^2)$
Resistenza (R), Reattanza (X)	ohm (Ω)	1 Ω = 1 V/A = 1 $kg·m^2/(A^2·s^3)$
Conduttanza (G)	siemens (S)	1 S = 1 A/V = 1 $A^2·s^3/(kg·m^2)$
Flusso magnetico (ϕ)	weber (Wb)	1 Wb = 1 V·s = 1 $kg·m^2/(A·s^2)$
Induzione magnetica (B)	tesla (T)	1 T = 1 Wb/m^2 = 1 $kg/(A·s^2)$
Auto e Mutua induttanza (L), (M)	henry (H)	1 H = 1 V·s/A = 1 $kg·m^2/(A^2·s^2)$
Pulsazione (ω)	rad/s	
Campo elettrico (E)	V/m	
Campo magnetico (H)	A/m	
Magnetizzazione (M)	A/m	
Densità di corrente (J)	A/m^2	
Costante dielettrica (ε)	F/m	
Permeabilità (μ)	H/m	
Conducibilità (σ)	S/m	
Potenza reattiva (Q)	VAr	Dimensionalmente uguali al W,
Potenza apparente (N)	voltampere (VA)	hanno tuttavia un altro significato.

Esistono anche unità non-SI che continuano ad essere utilizzate (tra la popolazione o in specifici ambiti commerciali, medici, legali, ...). Questa categoria contiene soprattutto unità temporali, angolari e quelle da esse derivate. Nella tabella a lato sono riportate alcune unità non-SI, con particolare riferimento a quelle utili in elettrotecnica.

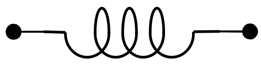
Alcune unità non-SI di uso corrente		
Unità	**Simbolo**	**Valore unitario**
minuto	min	60 s
ora	h	60 min
grado	°	(π/180) rad
giri/minuto (*)	RPM	(2π/60) rad/s
wattora	Wh	3.6 kJ

(*) la sigla RPM è costituita dalle iniziali della stessa unità di misura in inglese: «Revolutions Per Minute».

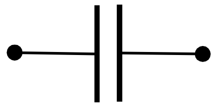
TABELLA DEI SIMBOLI CIRCUITALI PIÙ COMUNI

RESISTORE LINEARE

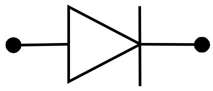
INDUTTORE LINEARE



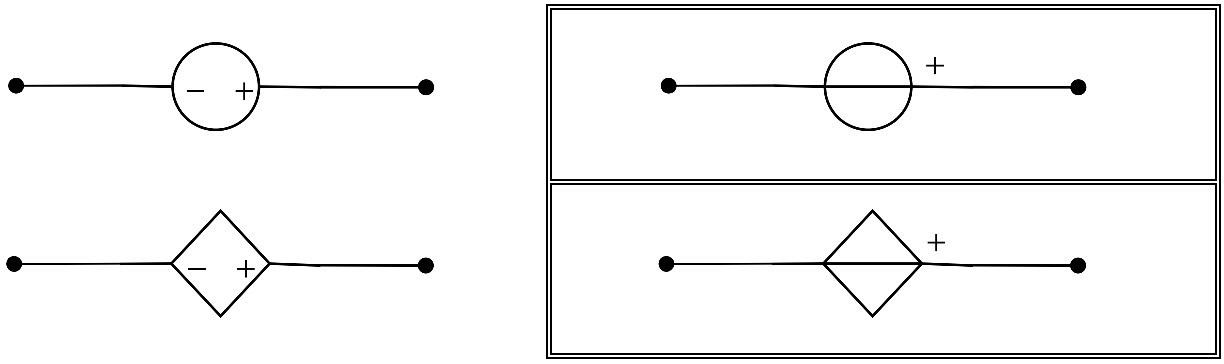
CONDENSATORE LINEARE



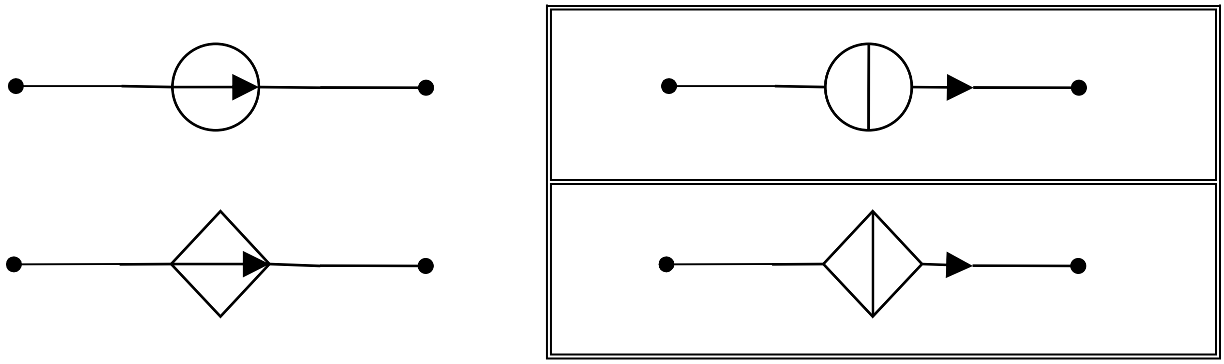
DIODO IDEALE



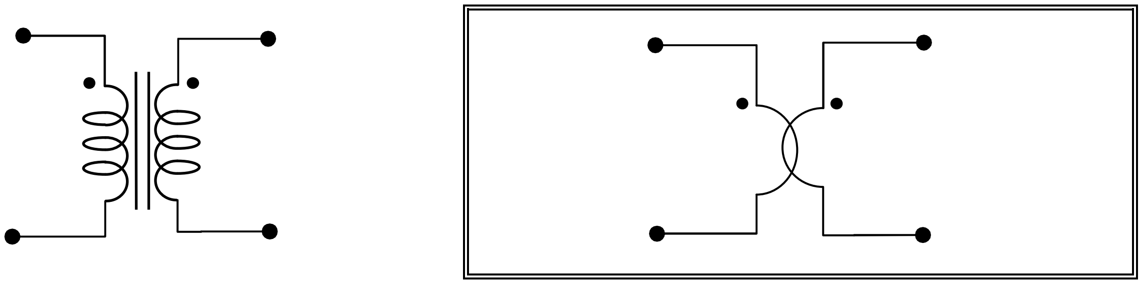
GENERATORE DI TENSIONE INDIPENDENTE E PILOTATO



GENERATORE DI CORRENTE INDIPENDENTE E PILOTATO



TRASFORMATORE IDEALE



AMPLIFICATORE OPERAZIONALE