LA TRASFORMATA DI LAPLACE E LA SUA APPLICAZIONE AI CIRCUITI LINEARI CON MEMORIA

1. DEFINIZIONE E PROPRIETÀ

La trasformata di Laplace di una funzione f(t) è definita dalla seguente relazione:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \tag{1}$$

dove F(s) è detta trasformata di Laplace della funzione f(t), s è una variabile complessa detta pulsazione complessa ed $\mathcal{L}$ indica l'operatore di Laplace che permette di passare da f(t) ad F(s). La relazione tra una funzione f(t) e la sua trasformata F(s) è biunivoca se ci si limita alla classe delle funzioni nulle per t <0. Le condizioni sufficienti(*) affinché una funzione sia trasformabile secondo Laplace sono che essa sia: 1) continua a tratti; 2) di ordine esponenziale, cioè $|f(t)| < Ae^{\alpha t}$, $\forall t > 0$ con A e α costanti.

Alcune proprietà della trasformata di Laplace sono riassunte nella Tabella 1. Tali proprietà, che possono essere facilmente verificate applicando la definizione (1), permettono di trasformare equazioni (o sistemi di equazioni) differenziali lineari nel dominio del tempo in equazioni (o sistemi di equazioni) algebriche nel dominio della pulsazione complessa, consentendone una più agevole soluzione. Risolvendo le equazioni trasformate si determinano le soluzioni trasformate nel dominio della pulsazione complessa. Per determinare le soluzioni nel dominio del tempo basta anti-trasformare. Alcune trasformate di Laplace per funzioni elementari sono riassunte nella Tabella 2.

Tabella 1. – Operazioni compatibili con la trasformata di Laplace

f(t)	F(s)
$f_1(t) + f_2(t)$	$F_1(s) + F_2(s)$
k f(t)	k F(s)
$\frac{d}{dt} f(t)$	$s\,F(s) - f(0^-)$
$\int_{0^-}^{t} f(t-t')\,g(t')\,dt'$	F(s) G(s)
0	0

L'operazione di anti-trasformazione, indicata con il simbolo $\mathcal{L}^{-1}$[F(s)], consiste nel determinare, a partire da una funzione F(s), la funzione f(t) la cui trasformata di Laplace è F(s). Esiste un integrale di inversione, ma la sua applicazione coinvolge conoscenze nel campo della teoria delle funzioni di variabile complessa che esulano dagli scopi della teoria dei circuiti. Infatti, grazie alla biunivocità della trasformata è possibile utilizzare le corrispondenze mostrate in Tabella 2 sia per trasformare (da sinistra verso destra) sia per anti-trasformare (da destra verso sinistra). Questo comporta tuttavia che, data una funzione F(s) da anti-trasformare, è necessario scomporla nella somma di termini elementari riconducibili ai casi riportati in Tabella 2. Quindi il problema della antitrasformazione consiste principalmente nella scomposizione in parti tabulate.

Tabella 2. - Trasformate di Laplace di funzioni elementari(o)

f(t)	F(s)
$\delta(t)$	1
u(t)	1/s
t^n u(t)	$n!/s^{n+1}$
e^{-at} u(t)	1/(s + a)
$\mathrm{sen}(\omega t)$ u(t)	$\omega/(s^2 + \omega^2)$
$\cos(\omega t)$ u(t)	$s/(s^2 + \omega^2)$
$e^{-at}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$ u(t)	$\dfrac{(s+a)\,\mathrm{sen}\,\varphi + \omega\cos\varphi}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at}\cos(\omega t + \varphi)$ u(t)	$\dfrac{(s+a)\cos\varphi - \omega\,\mathrm{sen}\,\varphi}{(s+a)^2 + \omega^2}$

(*) Esistono effettivamente funzioni trasformabili che non sono di ordine esponenziale. Ad esempio la funzione $1/\sqrt{t}$ non è di ordine esponenziale (in quanto diverge nell'origine) ma è Laplace - trasformabile, con trasformata $\sqrt{(\pi/s)}$.

(o) Utilizzando la trasformata di Laplace risultano utili la funzione a gradino unitaria u(t) (di Heaviside) e l'impulso unitario $\delta(t)$ (delta di Dirac). La funzione a gradino unitaria è definita da u(t) = 0, se t < 0 ed u(t) = 1, se $t \geq 0$ ed. L'impulso unitario è definibile come $\delta(t) = \lim_{\Delta\to 0} u(t-\Delta)u(\Delta - t)/2\Delta$. Si noti che $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = 1$, da cui il nome di impulso unitario. E' chiaro che la delta non è una funzione nel senso usuale (è infinita nell'origine e zero altrove): viene utilizzata per rappresentare approssimativamente fenomeni come i picchi (alti e localizzati) di alcune funzioni o le discontinuità.

In particolare, se ci si limita allo studio di circuiti a costanti concentrate lineari e tempo invarianti, si hanno da anti-trasformare solo funzioni razionali a coefficienti reali. Questa constatazione semplifica notevolmente il problema in quanto ogni funzione razionale può essere univocamente scomposta in fratti semplici. Posto F(s) =N(s)/D(s), dove N(s) e D(s) sono polinomi in s a coefficienti reali ed il grado di D è maggiore di quello di N, le soluzioni dell'equazione D(s) = 0 (si noti che tali soluzioni possono essere solo reali o complesse coniugate e in numero pari al grado di D) indicate con p_i sono dette poli della funzione F. Se tutti i poli sono semplici ($D(p_i) = 0$, $D'(p_i) \neq 0$,), la scomposizione in fratti semplici è data da[(o)]:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{s - p_i}$$

Una volta determinata la scomposizione, l'anti-trasformata di F è immediatamente deducibile. Ad esempio, se tutti i poli sono semplici, l'anti-trasformata è esprimibile nel modo seguente:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k_i}{s - p_i}\right] = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{p_i t} u(t)$$

Si consideri, ad esempio, il circuito in figura 1, che è un circuito del 1° ordine, cioè un circuito caratterizzato da un'equazione differenziale del primo ordine (cioè contenente un solo elemento con memoria). Si è già visto come ottenere l'equazione di stato e la condizione iniziale.

L'andamento temporale della corrente i(t) viene calcolato, seguendo il metodo della trasformata di Laplace, applicando la trasformata all'equazione differenziale, risolvendo l'equazione algebrica così ottenuta ed anti-trasformando.

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} + Ri = Eu(t) \\ i(0^-) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Ls \cdot I(s) - Li(0^-) + R \cdot I(s) = \frac{E}{s} \qquad (2)$$

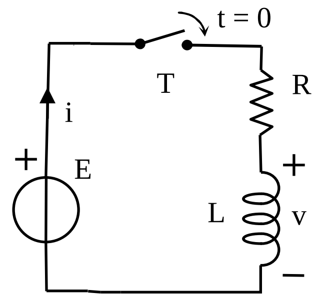

Figura 1 Circuito RL

L'equazione per la variabile trasformata I(s) è algebrica e può essere risolta esplicitamente:

$$I(s) = \frac{E}{s(Ls + R)} = \frac{E}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}}\right) \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{E}{R}\left(u(t) - e^{-\frac{R}{L}t}u(t)\right) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t) \qquad (3)$$

Ovviamente la (3) coincide con la soluzione già ottenuta risolvendo l'equazione di stato per t > 0 nel dominio del tempo.

Si vuole ora studiare l'evoluzione nel tempo delle variabili di stato nel circuito del secondo ordine rappresentato in figura 2. Si è già visto come ottenere l'equazione di stato e le condizioni iniziali. Supponendo, ad esempio, che i dati del problema siano: E_1 = 110 V, R_1 = 0.5 Ω, R_2 = 0.5 Ω, R_3 = 5 Ω, C = 200 μF , L = 3 mH, si ottiene:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = -5 \cdot 10^3 v_C(t) + 2.5 \cdot 10^3 i_L(t) - 5.5 \cdot 10^5 \\ \dfrac{di_L}{dt} = -1.66 \cdot 10^2 v_C(t) - 1.75 \cdot 10^3 i_L(t) + 1.826 \cdot 10^4 \\ v_C(0) = -1.1 \cdot 10^2 \\ i_L(0) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

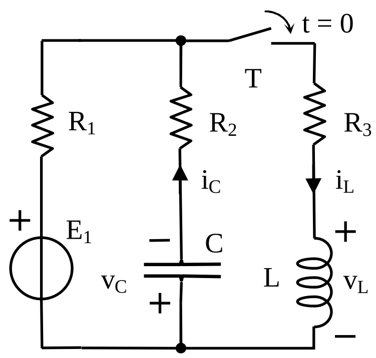

Figura 2

(o) Se N e D sono polinomi in s, è usuale rappresentare la funzione razionale F in termini di poli (le soluzioni dell'equazione D(s) = 0) e di zeri (le soluzioni dell'equazione N(s) = 0) dato che la conoscenza della posizione di poli e zeri equivale a conoscere F (a meno di un fattore di scala moltiplicativo). Poli e zeri sono usualmente rappresentati sul piano complesso utilizzando i simboli "×" e "○", rispettivamente.

Applicando la trasformata di Laplace al sistema (4) di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti (valido per t > 0), si ottiene:

$$\begin{cases} sV_C(s) - v_c(0) = -5\cdot 10^3 V_C(s) + 2.5\cdot 10^3 I_L(s) - \dfrac{5.5\cdot 10^5}{s} \\ sI_L(s) - i_L(0) = -1.66\cdot 10^2 V_C(s) - 1.75\cdot 10^3 I_L(s) + \dfrac{1.826\cdot 10^4}{s} \\ v_C(0) = -1.1\cdot 10^2 \\ i_L(0) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \left(s + 5\cdot 10^3\right) V_C - 2.5\cdot 10^3 I_L = -1.1\cdot 10^2 - \dfrac{5.5\cdot 10^5}{s} \\ \left(s + 1.75\cdot 10^3\right) I_L + 1.66\cdot 10^2 V_C = \dfrac{1.826\cdot 10^4}{s} \end{cases} \tag{6}$$

Risolvendo questo sistema lineare si ottengono le seguenti espressioni esplicite per $I_L(s)$ e $V_C(s)$:

$$\begin{cases} I_L(s) = \dfrac{3.65\cdot 10^4 s + 1.826\cdot 10^8}{s\left(s^2 + 6.75\cdot 10^3 s + 9.16\cdot 10^6\right)} = \dfrac{20}{s} + \dfrac{32.6}{s+1883} + \dfrac{12.6}{s+4866} \\ V_C(s) = -\dfrac{110 s^2 + 7.42\cdot 10^5 s + 9.17\cdot 10^8}{s\left(s^2 + 6.75\cdot 10^3 s + 9.16\cdot 10^6\right)} = -\dfrac{100}{s} - \dfrac{16.31}{s+1883} + \dfrac{6.31}{s+4866} \end{cases} \tag{7}$$

La soluzione nel dominio del tempo del sistema (4) si ottiene pertanto anti-trasformando le (7):

$$\begin{cases} i_L(t) = \left(20 + 32.6 e^{-1883t} + 12.6 e^{-4866t}\right) u(t) \\ v_C(t) = \left(-100 - 16.31 e^{-1883t} + 6.31 e^{-4866t}\right) u(t) \end{cases} \tag{8}$$

Il risultato ottenuto coincide ovviamente con la soluzione diretta del sistema (4).

In generale, la soluzione tramite trasformata di Laplace delle equazioni di stato procede sempre nel modo seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = [A]\cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = [A]\cdot \mathbf{X}(s) + \mathbf{B}(s) \tag{9}$$

E quindi nel dominio della pulsazione complessa si ottiene:

$$\mathbf{X}(s) = -\left([A] - s[1]\right)^{-1} \mathbf{x}_0 - \left([A] - s[1]\right)^{-1} \mathbf{B}(s) \tag{10}$$

La scomposizione in fratti semplici di $([A] - s[1])^{-1}$ può essere effettuata per ispezione o tramite la determinazione degli autovalori e degli autovettori della matrice di stato [A]. Come noto l'equazione caratteristica $det([A] - \lambda[1]) = 0$ permette di determinare gli autovalori (con [1] si è indicata la matrice identità). Dato che [A] è una matrice reale, l'equazione caratteristica è un polinomio a coefficienti reali di grado pari all'ordine del sistema. Gli zeri del polinomio (λ_k , con k intero definito da 1 a N, dove N è l'ordine del circuito ovvero la dimensione della matrice di stato) sono pertanto reali o complessi coniugati Ammesso per semplicità che gli autovalori siano distinti, l'autovettore $\mathbf{u}_k$ della matrice di stato si determina risolvendo il sistema lineare $([A] - \lambda_k[1])\,\mathbf{u} = 0$. Definendo la matrice $[U] = [\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k, ..., \mathbf{u}_N]$, le cui colonne sono gli autovettori, e la matrice $[\Lambda] = \mathrm{diag}\{\lambda_1, ..., \lambda_k, ..., \lambda_N\}$ nulla ovunque tranne che sulla diagonale che contiene gli autovalori, si possono rappresentare le N relazioni $[A]\,\mathbf{u}_k = \lambda_k\,\mathbf{u}_k$, come una sola relazione: $[A][U] = [U][\Lambda]$. Si ha quindi:

$$([A] - s[1]) = [U]\,([\Lambda] - s[1])[U]^{-1} = [U]\,(\mathrm{diag}\{\lambda_1 - s, ..., \lambda_k - s, ..., \lambda_N - s\})[U]^{-1}$$

Da cui: $$([A] - s[1])^{-1} = [U]\,(\mathrm{diag}\{1/(\lambda_1 - s), ..., 1/(\lambda_k - s), ..., 1/(\lambda_N - s)\})[U]^{-1}$$

E dunque $\mathcal{L}^{-1}[\,([A]-s[1])^{-1}\,] = -[U]\,(\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_k t}, ..., e^{\lambda_N t}\})[U]^{-1} = -[U]\,e^{[\Lambda]t}\,[U]^{-1}$

dove si è posto(*): $e^{[\Lambda]t} = \mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_k t}, ..., e^{\lambda_N t}\}$. Infine anti-trasformando la (10) si ha:

$$\mathbf{x}(t) = [U]e^{[\Lambda]t}[U]^{-1}\mathbf{x}_0 + \int_0^t [U]e^{[\Lambda](t-t')}[U]^{-1}\mathbf{b}(t')dt' \qquad (11)$$

Dove per il secondo termine si è utilizzata la proprietà dell' "integrale di convoluzione" (vedi ultima riga della Tabella 1). La (11) è la soluzione delle equazioni di stato nel dominio del tempo(**).

2. METODO SIMBOLICO E COMPONENTI

Procedendo come finora descritto si lavora nel dominio del tempo finché non si arriva alla determinazione del sistema di equazioni di stato. Si può tuttavia effettuare l'analisi di un circuito lineare procedendo sin dall'inizio nel dominio della pulsazione complessa (o dominio di Laplace). Questo è possibile perché il sistema risolvente si ottiene utilizzando le Leggi di Kirchhoff e le relazioni costitutive degli elementi che, essendo lineari, possono essere trasformate secondo Laplace.

	Dominio del tempo	Dominio di Laplace
LKC	$\sum_{r(\mathrm{RAMI})} i_r(t) = 0$	$\sum_{r(\mathrm{RAMI})} I_r(s) = 0$
LKT	$\sum_{r(\mathrm{RAMI})} v_r(t) = 0$	$\sum_{r(\mathrm{RAMI})} V_r(s) = 0$

Le leggi di Kirchhoff vengono rispettate anche dalle grandezze circuitali trasformate. Di conseguenza è possibile applicare la trasformata di Laplace direttamente a livello di circuito. Le relazioni costitutive dei componenti lineari vengono trasformate in relazioni algebriche tra le grandezze trasformate secondo il seguente schema (i componenti non-lineari non possono invece essere trasformati nel dominio di Laplace). I corrispondenti elementi nel dominio di Laplace non hanno significato fisico, poiché sono interessati da grandezze trasformate. I loro parametri tipici conservano le dimensioni originarie, ma vengono nominati diversamente per ricordare che sono riferiti al dominio trasformato. In generale si parla di impedenza quando si considera una quantità a dimensione Ohm [Ω] e di ammettenza quando si considera una quantità a dimensione Siemens [S].

Generatore di tensione

Il generatore indipendente di tensione ha in generale una tensione impressa $e_g(t)$ dipendente dal tempo. Nel dominio di Laplace si utilizza lo stesso simbolo usato nel dominio del tempo, in cui sono indicati direttamente le trasformate della tensione di ramo, della corrente di ramo e della tensione impressa $E_g(s)$. Il terminale contrassegnato dal segno + indica il terminale positivo della tensione impressa.

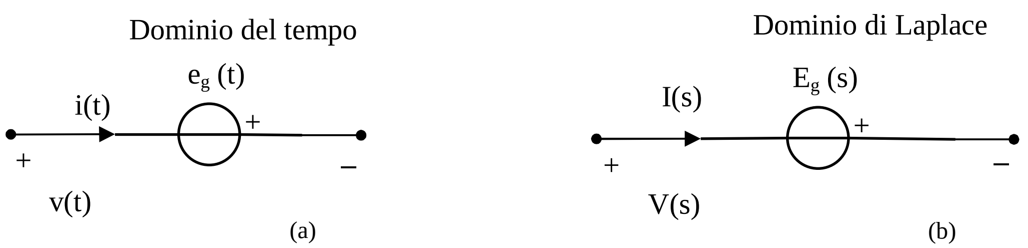

Figura 3 Generatore di tensione indipendente: (a) nel dominio del tempo, (b) nel dominio di Laplace.

(*) Si noti che $e^{[\Lambda]0} = \mathrm{diag}\{1, ..., 1, ..., 1\} = [1]$ e che $\frac{d}{dt}e^{[\Lambda]t} = \mathrm{diag}\{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, \lambda_k e^{\lambda_k t}, \ldots, \lambda_N e^{\lambda_N t}\} = [\Lambda]e^{[\Lambda]t}$

(**) La verifica è immediata: $\dot{\mathbf{x}}(t) = [U][\Lambda]e^{[\Lambda]t}[U]^{-1}\mathbf{x}_0 + \int_0^t [U][\Lambda]e^{[\Lambda](t-t')}[U]^{-1}\mathbf{b}(t')dt' + [U]e^{[\Lambda]0}[U]^{-1}\mathbf{b}(t) =$

$= [A][U]e^{[\Lambda]t}[U]^{-1}\mathbf{x}_0 + \int_0^t [A][U]e^{[\Lambda](t-t')}[U]^{-1}\mathbf{b}(t')dt' + \mathbf{b}(t) = [A]\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$. Inoltre $\mathbf{x}(0) = [U]e^{[\Lambda]0}[U]^{-1}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$

Con riferimento ai versi positivi delle grandezze indicati nella figura 3.a, la caratteristica del generatore di tensione indipendente nel dominio del tempo è la seguente:

$$v(t) = -\,e_g\,(t) \qquad (12)$$

Utilizzando la trasformata di Laplace, la caratteristica del generatore di tensione indipendente nel dominio di Laplace è quindi la seguente:

$$V(s) = -\,E_g(s) \qquad (13)$$

Si noti che la (13) è ottenibile direttamente dal circuito 3.b, utilizzando le solite convenzioni sui versi di riferimento. Anche per i generatori di tensione pilotati lineari (GTPT e GTPC) si procede allo stesso modo: nel dominio di Laplace si utilizza lo stesso simbolo e tutte le variabili circuitali sono sostituite dalle rispettive trasformate.

Generatore di corrente

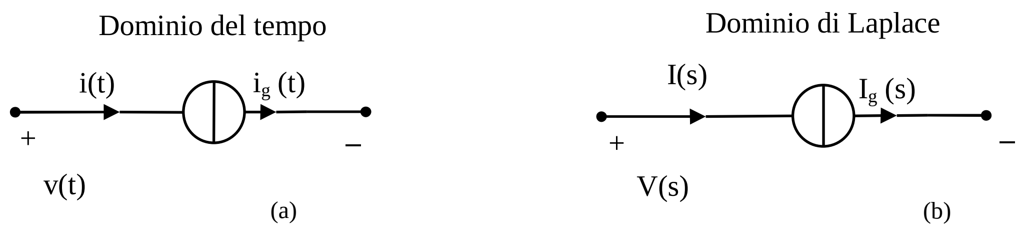

Figura 4 Generatore di corrente indipendente: (a) nel dominio del tempo, (b) nel dominio di Laplace.

Il generatore indipendente di corrente ha in generale una corrente impressa $i_g(t)$ dipendente dal tempo. Nel dominio di Laplace si utilizza lo stesso simbolo usato nel dominio del tempo, in cui sono indicati direttamente le trasformate della tensione di ramo, della corrente di ramo e della corrente impressa I_g (s). La freccia indica il verso positivo della corrente impressa.

Con riferimento ai versi positivi delle grandezze indicati nella figura 4.a, la caratteristica del generatore di corrente indipendente nel dominio del tempo è la seguente:

$$i(t) = i_g(t) \qquad (14)$$

Utilizzando la trasformata di Laplace, la caratteristica del generatore di corrente indipendente nel dominio di Laplace è quindi la seguente:

$$I(s) = I_g(s) \qquad (15)$$

Si noti che la (15) è ottenibile direttamente dal circuito 4.b, utilizzando le solite convenzioni sui versi di riferimento. Anche per i generatori di corrente pilotati lineari (GCPT e GCPC) si procede allo stesso modo: nel dominio di Laplace si utilizza lo stesso simbolo e tutte le variabili circuitali sono sostituite dalle rispettive trasformate.

Trasformatore ideale

Il trasformatore ideale è definito nel dominio del tempo dalle seguenti relazioni lineari:

$$v_1(t) = K\,v_2(t) \qquad (16.a)$$
$$i_2(t) = -\,K\,i_1(t) \qquad (16.b)$$

Utilizzando la trasformata di Laplace, le (16) si trasformano nel dominio di Laplace come segue:

$$V_1(s) = K\,V_2(s) \qquad (17.a)$$
$$I_2(s) = -\,K\,I_1(s) \qquad (17.b)$$

Come per i generatori, nel dominio di Laplace si mantiene lo stesso simbolo e tutte le variabili circuitali sono sostituite dalle rispettive trasformate.

Resistore

Il resistore lineare ha come caratteristica nel dominio del tempo:

$$v(t) = R\,i(t) \quad [\text{oppure } i(t) = G\,v(t), \text{ dove } G = 1/R] \qquad (18)$$

Utilizzando la trasformata di Laplace, le (18) si trasformano nel dominio di Laplace come segue:

$$V(s) = R\ I(s) \quad [\text{oppure } I(s) = G\ V(s), \text{ dove } G = 1/R] \qquad (19)$$

Nel dominio di Laplace il resistore si indica come in figura 5.b, specificando il valore di resistenza (o di conduttanza), e sostituendo le variabili circuitali con le rispettive trasformate.

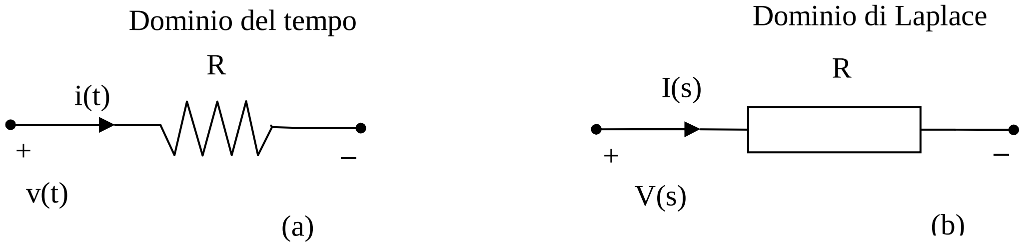

Figura 5 Resistore lineare: (a) nel dominio del tempo, (b) nel dominio di Laplace.

Induttore

L'induttore lineare ha come caratteristica nel dominio del tempo: $$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) \qquad (20)$$

Utilizzando la trasformata di Laplace, la (20) si trasforma nel dominio di Laplace come segue:

$$V(s) = sL\ I(s) - L\ i(0)\ [\text{oppure } I(s) = V(s)/(sL) + i(0)/s] \qquad (21)$$

Nel dominio di Laplace il circuito equivalente dell'induttore si indica come in figura 6.b, specificando il valore di impedenza sL e la tensione impressa Li(0), e sostituendo le variabili circuitali con le rispettive trasformate.

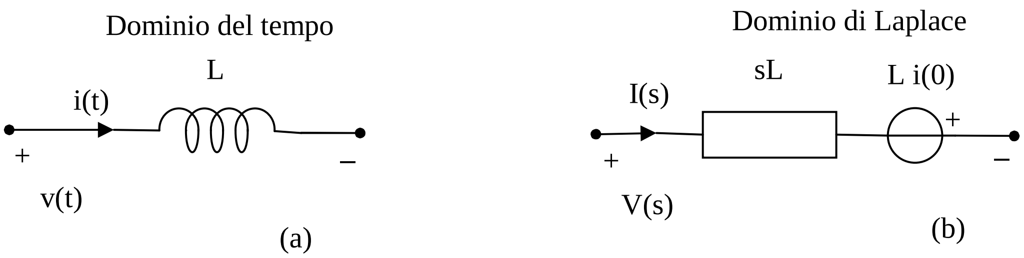

Figura 6 Induttore lineare: (a) nel dominio del tempo, (b) nel dominio di Laplace.

Condensatore

Il condensatore lineare ha come caratteristica nel dominio del tempo: $$i(t) = C\frac{d}{dt}v(t) \qquad (22)$$

Utilizzando la trasformata di Laplace, la (22) si trasforma nel dominio di Laplace come segue:

$$I(s) = sC\ V(s) - C\ v(0) \quad [\text{oppure } V(s) = I(s)/(sC) + v(0)/s] \qquad (23)$$

Nel dominio di Laplace il circuito equivalente del condensatore si indica come in figura 7.b, specificando il valore di impedenza 1/sC e la corrente impressa Cv(0), e sostituendo le variabili circuitali con le rispettive trasformate.

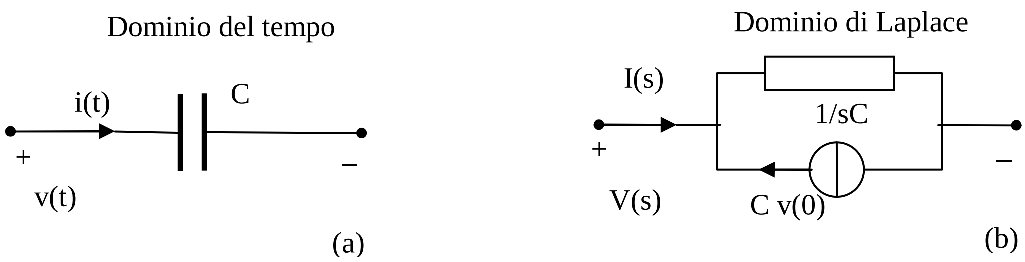

Figura 7 Condensatore lineare: (a) nel dominio del tempo, (b) nel dominio di Laplace.

Riassumendo, si noti come nel dominio di Laplace le LK siano formalmente identiche alle LK nel dominio del tempo per i circuiti privi di memoria (o in regime stazionario) salvo il fatto che in luogo delle grandezze tensioni e correnti compaiono le loro trasformate. Anche le caratteristiche dei generatori, sia indipendenti sia pilotati, del trasformatore ideale e del resistore nel dominio di Laplace sono formalmente identiche alle rispettive caratteristiche nel dominio del tempo per i circuiti in regime stazionario salvo il fatto che in luogo delle grandezze tensioni e correnti compaiono le loro trasformate. Infine induttore e condensatore possono essere unificati nel dominio di Laplace con un unico componente lineare che formalmente è un generatore reale. Queste osservazioni permettono di affermare che tutti i metodi di soluzione applicabili ai circuiti privi di memoria (o in regime stazionario) nel dominio del tempo possono essere applicati anche ai circuiti nel dominio di Laplace, salvo l'impiego delle variabili trasformate. Valgono inoltre tutti i teoremi e le equivalenze sulle reti prive di memoria (serie, parallelo, trasformazioni stella-triangolo, Teoremi di Thevenin, di Norton, di Millman, etc.) con le dette modifiche. Quanto detto mostra anche come non sia necessario, ogni volta che si risolve un circuito, procedere alla "trasformazione" delle equazioni, potendosi scrivere direttamente queste ultime nel dominio di Laplace. In definitiva quindi l'operazione di trasformazione è di regola effettuata direttamente sullo schema circuitale.

Per illustrare come sia possibile applicare la trasformata di Laplace direttamente a livello di circuito si consideri nuovamente il circuito illustrato in figura 5.a, per t > 0. Sostituendo ad ogni elemento circuitale nel dominio del tempo il corrispondente componente o circuito equivalente nel dominio di Laplace si ottiene il circuito trasformato nel dominio di Laplace (vedi figura 5.b). Al circuito trasformato è possibile applicare tutti i metodi visti per l'analisi dei circuiti privi di memoria.

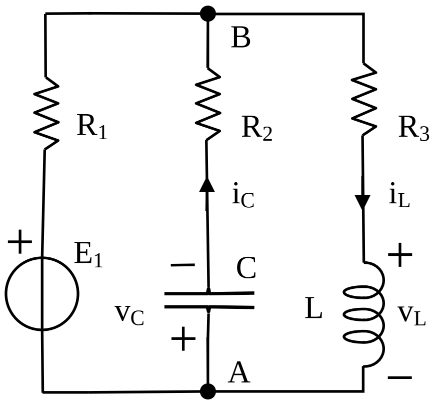

Figura 5.a - Circuito nel dominio del tempo

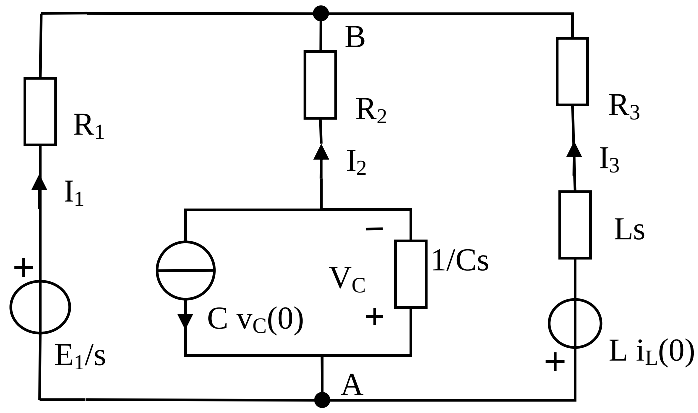

Figura 5.b - Circuito nel dominio di Laplace

La soluzione del circuito di figura 5.b può essere ottenuta calcolando prima la tensione V_{BA}:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{(E_1/s)-V_{BA}}{R_1} \\ I_2 &= \frac{-V_C-V_{BA}}{R_2} \\ I_3 &= -I_L \\ I_1+I_2+I_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad V_{BA} = \frac{\dfrac{E_1}{sR_1}-\dfrac{V_C}{R_2}-I_L}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}} \tag{24}$$

e quindi esprimendo la corrente $I_L(s)$ e la tensione $V_C(s)$ in funzione di $V_{BA}(s)$:

$$\begin{cases} sCV_C(s)-Cv_C(0) = \dfrac{-V_C(s)-V_{BA}(s)}{R_2} \\ sLI_L(s)-Li_L(0) = V_{BA}(s)-R_3I_L(s) \end{cases} \tag{25}$$

Posto E_1 = 110 V, $R_1 = R_2$ = 0.5 Ω, R_3 = 5 Ω, C = 200 μF, L =3 mH dalla (24) si ottiene:

$$V_{BA} = \frac{55}{s} - 0.5V_C - 0.25I_L \tag{26}$$

mentre dalla (25) si ottiene:

$$\begin{cases} sV_C - v_C(0) = -5\cdot 10^3 V_C + 2.5\cdot 10^3 I_L - \dfrac{5.5\cdot 10^5}{s} \\ sI_L - i_L(0) = -1.66\cdot 10^2 V_C - 1.75\cdot 10^3 I_L + \dfrac{1.826\cdot 10^4}{s} \end{cases} \tag{27}$$

Il sistema (27) è del tutto identico al sistema (5) che era stato ottenuto per altra via.

Il metodo di analisi ora illustrato viene chiamato **Metodo simbolico di analisi nel dominio di Laplace**. È importante notare che il circuito trasformato è un circuito fittizio, cioè privo di significato fisico, ed è privo di memoria. Un importante vantaggio del metodo simbolico su quelli differenziali è rappresentato dal fatto che le condizioni iniziali sono rappresentate da generatori indipendenti all'interno del circuito trasformato, il che comporta una notevole semplificazione nella considerazione delle condizioni iniziali.

3. FUNZIONI DI RETE

Nel dominio di Laplace si ottengono circuiti descritti da equazioni algebriche. Pertanto, analogamente a quanto accade per i circuiti privi di memoria nel dominio del tempo, qualsiasi risposta è proporzionale alla causa che l'ha generata, supponendo nulle tutte le condizioni iniziali. L'unica differenza è che nel dominio di Laplace il fattore di proporzionalità è in generale dipendente da s. Quindi, detta $X_{out}(s)$ la risposta del circuito ed $X_{in}(s)$ la causa che l'ha generata, si può scrivere:

$$X_{out}(s) = H(s)\, X_{in}(s) \tag{28}$$

dove il fattore di proporzionalità H(s) viene detto **funzione di rete** (o funzione di trasferimento). In particolare, se ci si limita allo studio di circuiti a costanti concentrate lineari e tempo invarianti, le funzioni di rete sono sempre funzioni razionali a coefficienti reali. La risposta (o uscita) X_{out} e l'eccitazione (o ingresso) X_{in} possono essere una qualsiasi coppia di variabili elettriche del circuito in esame[(*)].

È importante sottolineare che una funzione di rete non è la trasformata di Laplace di una grandezza elettrica presente nel circuito, ma è un rapporto di trasformate. Essa diventa la trasformata di una grandezza circuitale solo nel caso particolare in cui la trasformata dell'eccitazione è unitaria, cioè l'eccitazione nel dominio del tempo è un impulso unitario. In tal caso si ha infatti: $x_{in}(t) = \delta(t)$ $\Rightarrow X_{in}(s) = 1 \Rightarrow X_{out}(s) = H(s) \Rightarrow x_{out}(t) = h(t)$. L'anti-trasformata di una funzione di rete è quindi uguale alla risposta ad un impulso unitario e viene detta perciò "risposta impulsiva". La conoscenza della risposta impulsiva, che in linea di principio è anche misurabile, permette di determinare la risposta ad una eccitazione qualsiasi[(**)]. È sufficiente a questo scopo considerare la proprietà dell' "integrale di convoluzione" (vedi ultima riga della Tabella 1):

$$x_{out}(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_{out}(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)X_{in}(s)] = \int_{0^-}^{t} h(t-t')\,x_{in}(t')\,dt' \tag{29}$$

Si possono definire analoghe funzioni di rete anche per i circuiti in AC nel dominio simbolico. Tuttavia l'analisi nel dominio di Laplace permette di unificare i due concetti. Infatti, dato che le condizioni iniziali sono nulle, è sufficiente considerare le funzioni di rete come funzioni di jω invece che di s. Ciò è dovuto al fatto che le caratteristiche di resistore, induttore, condensatore, trasformatore ideale e generatori pilotati nel dominio di Laplace coincidono, per s = jω con le caratteristiche degli stessi componenti nel dominio simbolico (ottenute tramite la trasformata di Steinmetz).

[(*)] Poiché sia l'ingresso che l'uscita possono essere una corrente oppure una tensione, in un qualunque punto del circuito, esistono quattro possibili tipi di funzione di trasferimento: $(V_{out}(s)/V_{in}(s))$ = guadagno di tensione, $(I_{out}(s)/I_{in}(s))$ = guadagno di corrente, $(V_{out}(s)/I_{in}(s))$ = impedenza, $(I_{out}(s)/V_{in}(s))$ = ammettenza. Impedenze ed ammettenze sono usualmente indicate tramite i simboli Z ed Y, rispettivamente, analogamente a quanto si fa in regime AC.

[(**)] In particolare, l'uscita corrispondente a un ingresso $x_{in}(t) = u(t)$ con condizioni iniziali nulle, prende il nome di "risposta al gradino unitario". Evidentemente si ha $x_{out}(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)/s] = \int_{0^-}^{t} h(t')\,dt'$, ossia la risposta al gradino unitario è pari all'integrale della risposta all'impulso (ovvero la risposta all'impulso è la derivata della risposta al gradino).

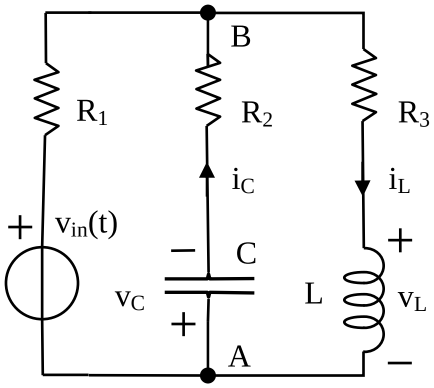

Figura 6.a - Circuito nel dominio del tempo

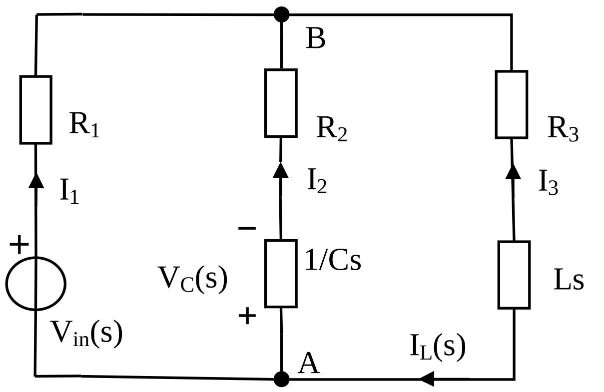

Figura 6.b - Circuito nel dominio di Laplace, supponendo nulle le condizioni iniziali.

A titolo di esempio si consideri nuovamente il circuito illustrato in figura 6.a in cui si intende determinare il guadagno di tensione V_C/V_{in} e l'ammettenza di trasferimento I_L/V_{in}. Passando al dominio di Laplace e supponendo nulle le condizioni iniziali, si ottiene il circuito di figura 6.b. Le impedenze sul ramo centrale sono in serie e quindi equivalenti ad una unica impedenza $R_2 + 1/Cs$. Analogamente sul ramo di destra si ha una unica impedenza equivalente serie pari a $R_3 + Ls$. I rami al centro e a destra sono in parallelo, quindi sostituibili con una sola impedenza equivalente parallelo pari a:

$$Z_{//} = \frac{(R_2 + 1/Cs)(R_3 + Ls)}{R_2 + 1/Cs + R_3 + Ls} = \frac{2.5\cdot 10^4 + 17.5s + 1.5\cdot 10^{-3}s^2}{5\cdot 10^3 + 5.5s + 3\cdot 10^{-3}s^2}$$

Posto $R_1 = R_2 = 0.5\ \Omega$, $R_3 = 5\ \Omega$, $C = 200\ \mu F$, $L = 3\ mH$, la corrente I_1 è quindi data da:

$$I_1 = \frac{V_{in}}{R_1 + Z_{//}} = \frac{5\cdot 10^3 + 5.5s + 3\cdot 10^{-3}s^2}{2.75\cdot 10^4 + 20.25s + 3\cdot 10^{-3}s^2} V_{in}$$

La tensione tra i nodi B ed A è quindi: $V_{BA} = Z_{//} I_1 = \dfrac{2.5\cdot 10^4 + 17.5s + 1.5\cdot 10^{-3}s^2}{2.75\cdot 10^4 + 20.25s + 3\cdot 10^{-3}s^2} V_{in}$

La tensione sul condensatore e la corrente sull'induttore sono quindi immediatamente deducibili:

$$V_C = \frac{I_2}{Cs} = -\frac{1}{Cs}\frac{V_{BA}}{R_2 + 1/Cs} = -\frac{V_{BA}}{1 + 10^{-4}s} \quad ; \quad I_L = \frac{V_{BA}}{R_3 + Ls} = \frac{V_{BA}}{5 + 3\cdot 10^{-3}s}$$

Da cui si ottengono le funzioni di rete richieste:

$$H(s) = \frac{V_C}{V_{in}} = -\frac{1}{1 + 10^{-4}s}\frac{V_{BA}}{V_{in}} = -\frac{2.5\cdot 10^4 + 17.5s + 1.5\cdot 10^{-3}s^2}{(1 + 10^{-4}s)(2.75\cdot 10^4 + 20.25s + 3\cdot 10^{-3}s^2)}$$

$$Y(s) = \frac{I_L}{V_{in}} = \frac{1}{5 + 3\cdot 10^{-3}s}\frac{V_{BA}}{V_{in}} = \frac{2.5\cdot 10^4 + 17.5s + 1.5\cdot 10^{-3}s^2}{(5 + 3\cdot 10^{-3}s)(2.75\cdot 10^4 + 20.25s + 3\cdot 10^{-3}s^2)}$$

Si vuole ora determinare la risposta all'impulso unitario h(t) corrispondente ad H(s), ovvero l'anti-trasformata di H. Si effettua quindi la scomposizione in fratti semplici notando che i poli di H sono $p_1 \cong -1883$, $p_2 \cong -4866$ e $p_3 = -10000$, mentre gli zeri sono $z_1 = -10000$ e $z_2 \cong -1666$. Semplificando il fattore comune $(s + 10^4)$ si ha quindi:

$$H(s) = -\frac{5\cdot 10^3 (s + 1666)}{(s + 1883)(s + 4866)}$$

I poli sono semplici e con parte reale negativa, quindi la risposta all'impulso unitario sarà la somma di esponenziali decrescenti. La scomposizione cercata è nella forma:

$$H(s) = \frac{k_1}{s + p_1} + \frac{k_2}{s + p_2} \tag{30}$$

Dato che i poli sono semplici, il modo più rapido per ottenere le costanti k_1 e k_2 (residui nei poli) è moltiplicare entrambi i membri della (30) per $(s + p_i)$ e, dopo la semplificazione con il denominatore di H, valutarli nel polo (cioè per $s = -p_i$), ottenendo $[(s + p_i)H(s)]|_{s = -p_i} = k_i$ (con i = 1, 2). Si ottengono quindi $k_1 \cong -363$, $k_2 \cong -5363$. Anti-trasformando la (30) si ottiene infine:

$$h(t) = \left(-363e^{-1883t} - 5863e^{-4866t}\right)u(t)$$