

ELETTROSTATICA

Si parla di elettrostatica quando, in ogni punto dello spazio ed in ogni istante risultano nulle tutte le derivate temporali che compaiono nelle equazioni generali dell'elettromagnetismo, e la densità di corrente $\mathbf{J}$ è pure identicamente nulla. Sotto queste ipotesi, le equazioni per il campo elettrico possono essere riscritte come segue:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2)$$

a cui possono essere associate, in caso di mezzo isotropo e lineare, le equazioni di legame materiale:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (3)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = 0. \quad (4)$$

La (1) e la (2) possono, come è già stato visto, essere espresse in forma integrale:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (5)$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q. \quad (6)$$

La (2) e la (6) sono la formulazione della ben nota legge di Gauss, rispettivamente in forma locale ed integrale. La (1) e la (5) esprimono l'irrotazionalità del vettore $\mathbf{E}$, che definisce quindi un campo conservativo. In virtù di quanto visto sui campi conservativi, il campo elettrico può essere espresso come gradiente di un opportuno potenziale scalare:

$$\mathbf{E} = -\nabla v \quad (7)$$

La funzione scalare v viene detta potenziale elettrico, ed è definito a meno di una costante. Tale indeterminazione viene eliminata fissando il valore del potenziale di un punto del dominio. Normalmente viene posto uguale a zero il potenziale all'infinito.

L'integrale di $\mathbf{E}$ lungo una linea qualsiasi contenuta nel dominio non dipende dalla linea stessa, ma unicamente dal valore che il potenziale elettrico assume agli estremi di integrazione:

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = v_A - v_B. \quad (8)$$

Per la definizione di campo elettrico, il primo membro della (8) è il lavoro fatto dalle forze elettriche su una carica unitaria. Imponendo che il potenziale all'infinito sia nullo, la quantità:

$$v_A = \int_A^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

rappresenta il lavoro che il campo elettrico compirebbe portando una carica unitaria dalla posizione A all'infinito.

Calcolo del campo elettrostatico

Sia data una regione dello spazio τ , delimitata dalla superficie S , dalle (2), (7) è immediato ricavare l'equazione che permette di calcolare il potenziale elettrico una volta note le distribuzioni di carica, che costituiscono, nel caso elettrostatico, le "sorgenti" del campo elettrico:

$$\nabla^2 v = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (9)$$

La (9) è l'equazione di Poisson per il potenziale elettrico. Nelle regioni in cui la densità di carica è nulla, dalla (2) segue che il campo elettrico è solenoidale, ed obbedisce quindi all'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 v = 0. \quad (10)$$

Affinché sia definita la soluzione dell'equazione (9) è necessario assegnare le opportune condizioni al contorno su tutta la superficie S che racchiude il dominio di calcolo: si parla quindi di

- Condizioni al contorno di Dirichlet, quando è assegnato il potenziale su tutto il contorno. Un problema così formulato viene detto problema di Dirichlet;
- Condizioni al contorno di Neumann, quando è assegnata la derivata normale del potenziale su tutta la superficie di contorno del dominio.

Per ricavare una soluzione formale dell'equazione (9), si calcola il campo elettrico dovuto ad una carica puntiforme q , immersa in un mezzo infinito, lineare ed isotropo (fig. 1). In virtù della completa simmetria sferica che il problema presenta, è possibile supporre che il potenziale sia costante su superfici sferiche aventi come centro il punto P_{dq} in cui la carica q è situata. In altre parole il potenziale, e quindi il campo elettrico, sono unicamente funzione della variabile r , definita come distanza del generico punto dalla carica stessa. Il campo elettrico $\mathbf{E}$ è esprimibile come gradiente del potenziale elettrico, che in coordinate sferiche porta a scrivere:

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial v}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi \right).$$

Ma, poiché il potenziale elettrico è unicamente funzione di r :

$$\mathbf{E}(r) = -\frac{\partial v}{\partial r} \mathbf{i}_r. \quad (11)$$

Il campo elettrico ha quindi unicamente direzione radiale. Dalla legge di Gauss in forma integrale di ottiene, utilizzando come superficie di integrazione S una sfera avente il centro nel punto P_q :

$$4\pi r^2 \mathbf{E}(r) = \frac{dq}{\epsilon} \mathbf{i}_r,$$

che tenendo conto della (11) fornisce l'equazione differenziale:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{q}{4\pi \epsilon r^2}. \quad (12)$$

La (12), integrata tenendo conto della condizione di annullamento del potenziale all'infinito, fornisce la soluzione:

$$v(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon r}. \quad (13)$$

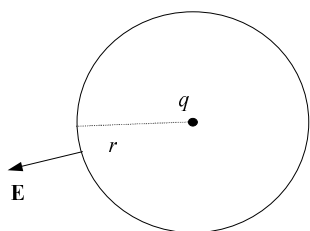


fig. 1

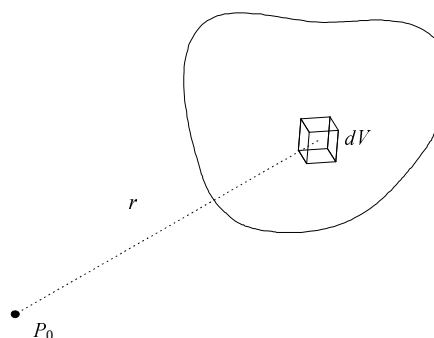


fig. 2

Nel caso in cui una carica Q sia distribuita su un volume, con una densità di carica ρ , il potenziale elettrico in un generico punto P_0 dello spazio si ottiene integrando i contributi delle cariche infinitesime $dq = \rho d\tau$ (Vedi fig. 2). Si può quindi scrivere:

$$v(P_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_Q \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho}{r} d\tau.$$

Elettrostatica dei conduttori e dei dielettrici

Come si è detto, affinché si possa parlare di elettrostatica deve essere verificata l'assenza di correnti elettriche in tutto lo spazio. Dalla 4. si deduce che deve essere verificata una delle due seguenti condizioni :

- $\sigma = 0, \mathbf{E} \neq 0;$ (14.a)

- $\sigma \neq 0, \mathbf{E} = 0.$ (14.b)

La prima delle due condizioni si verifica nei conduttori, mentre la seconda nei materiali isolanti.

Nei conduttori quindi, essendo nullo il campo elettrico, è anche costante il potenziale elettrico. Le superfici esterne dei conduttori sono dunque superfici equipotenziali, e la componente di campo elettrico tangenziale è nulla.

Utilizzando la legge di Gauss si ottiene un'altra importante proprietà per i conduttori in regime elettrostatico: si consideri infatti una qualsiasi superficie chiusa e completamente interna al conduttore. Applicando la (6) e tenendo conto del fatto che il campo elettrico è nullo su tutta la superficie segue immediatamente che risulta nulla anche la carica contenuta all'interno della superficie. Data l'arbitrarietà della superficie, se ne deduce che le eventuali cariche libere su un corpo conduttore si dispongono sulla sua superficie esterna.

Si consideri ora una superficie chiusa cilindrica come quella mostrata in fig. 3, avente base infinitesima ΔS ed altezza δl infinitesimo di ordine superiore rispetto a ΔS . Una delle basi è contenuta nel corpo conduttore, l'altra è esterna. Poiché, data la natura infinitesimale di ΔS , campo elettrico e densità di carica possono essere considerati costanti, ed il campo elettrico all'interno del conduttore è nullo in regime elettrostatico, applicando la (6) si ottiene:

$$D_{\perp} = \rho_s, \quad E_{\perp} = \frac{\rho_s}{\epsilon}, \tag{15}$$

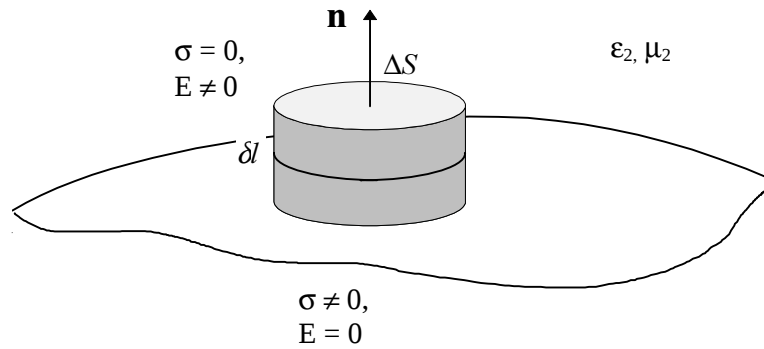


Fig. 3

dove ϵ è la costante dielettrica del mezzo isolante in cui il conduttore è immerso. E' possibile inoltre invertire il ragionamento: se infatti il campo elettrico è non nullo sulla superficie del conduttore, esiste su di esso una distribuzione superficiale di carica.

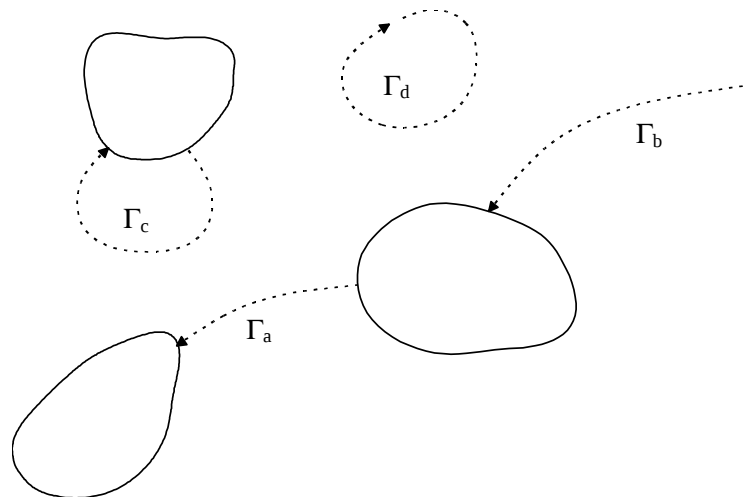


Fig. 4

Problema generale dell'elettrostatica

Il problema generale dell'elettrostatica consiste nel determinare il campo elettrico in tutto lo spazio quando per alcuni conduttori presenti sono fissati i rispettivi potenziali, mentre per gli altri sono fissate le cariche totali possedute. E' possibile dimostrare che, nel caso in cui il potenziale soddisfi le condizioni di regolarità all'infinito, la soluzione del problema generale dell'elettrostatica è unica. Senza scendere nel dettaglio, siamo interessati a conoscere l'andamento qualitativo delle linee di campo elettrico e di induzione elettrica. In base alla (14.b), le regioni occupate dall'isolante sono le uniche in cui il campo elettrico può essere diverso da zero. Supponendo che in tali regioni non sia presente alcuna distribuzione di carica, è possibile affermare che il campo elettrico è ivi solenoidale ed irrotazionale, e che il potenziale elettrico è governato dall'equazione di Laplace. Poiché il campo elettrico è solenoidale, le linee di campo non possono avere né "sorgenti" né "vortici", ma possono:

- a) andare da un conduttore ad un altro;
- b) andare da un conduttore all'infinito;
- c) partire da un conduttore e richiudersi sullo stesso;

d) richiudersi su se stesse.

Le ultime due ipotesi sono però da scartare per l'irrotazionalità del campo elettrico. Si supponga infatti che la linea di campo segua la curva Γ_c mostrata in fig. 4. Utilizzando la (8) si otterrebbe:

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

relazione assurda, dal momento il primo membro è diverso da zero perché l'integrando ha sempre lo stesso segno lungo Γ_c . Allo stesso modo è possibile dimostrare che non possono esistere linee di campo che si chiudono su se stesse, come Γ_d in fig. 4. Le uniche linee di campo possibili sono quelle del tipo a) e b). Le linee di campo come Γ_a collegano due conduttori, in cui si assume che esista una distribuzione di carica non nulla.

Si consideri ora un tubo di flusso di campo di induzione elettrica che, come illustrato in fig. 5, va dal conduttore 1 al conduttore 2. Si noti che, per la (15), l'esistenza di un tubo di flusso siffatto implica la presenza di cariche elettriche sulla superficie dei conduttori. Tale tubo individua sulla superficie esterna del conduttore 1 la curva chiusa Γ_1 , e sul conduttore la curva Γ_2 . Si costruisca la superficie chiusa costituita dalla superficie laterale del tubo di flusso e da due superfici S_1 , interna al conduttore 1 ed S_2 , interna al conduttore 2, che si appoggiano rispettivamente a Γ_1 e Γ_2 . Il flusso del campo elettrico attraverso la superficie chiusa così definita è nullo, perché il campo è nullo sulle superfici S_1 ed S_2 , ed è parallelo alla superficie del tubo di flusso. Ne segue che, per la legge di Gauss (eq. 6), la carica totale racchiusa all'interno della superficie è nulla, e che quindi se q_1 e q_2 , sono rispettivamente le cariche sopra le superfici dei due conduttori delimitate dalle curve Γ_1 e Γ_2 , $q_1 = -q_2$. E' quindi possibile affermare che le cariche contenute sulle superfici di corpi conduttori delimitate da un tubo di flusso sono uguali e di segno opposto.

Nel caso in cui due conduttori siano disposti in modo tale che tutte le linee di campo uscenti da uno si richiudono sull'altro e viceversa, le cariche totali sui due conduttori sono uguali e di segno opposto. L'insieme di due conduttori siffatti viene definito condensatore. I due conduttori che costituiscono il condensatore sono detti armature del condensatore.

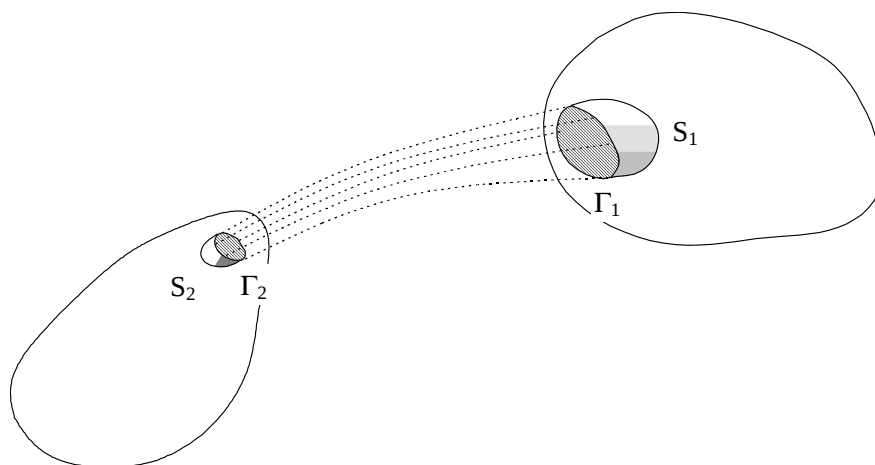


fig. 5

Schermo elettrostatico

Si consideri ora il caso di un conduttore contenente al suo interno una cavità (Fig. 6). Poiché il potenziale è costante sul conduttore, la superficie che delimita la cavità è equipotenziale. All'interno della cavità il campo elettrico deve essere nullo. Se infatti, per assurdo, ammettessimo l'esistenza di

un campo elettrico, le linee di campo dovrebbero necessariamente o chiudersi su se stesse, o partire da e terminare su due punti posti sulla superficie interna del conduttore cavo. Ma queste due ipotesi, in base alle considerazioni qualitative fatte poc'anzi sull'andamento del campo elettrico, sono da scartare. Se ne desume quindi che il campo elettrico è nullo su tutta la cavità, che viene in questo modo schermata dai campi elettrici esterni, e che il potenziale risulta costante. Un conduttore siffatto viene quindi detto schermo elettrostatico.

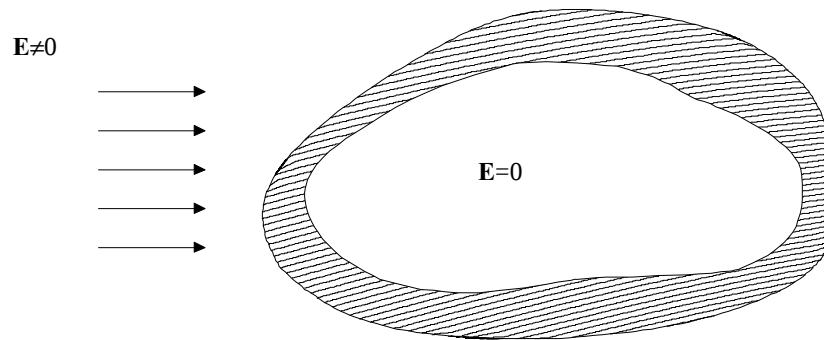


Fig.6

Gli schermi elettrostatici sono usati in numerosi dispositivi elettrici, per evitare che campi elettrici esterni interferiscano con il loro normale funzionamento. Generalmente una gabbia di rete metallica (gabbia di Faraday) con maglie non troppo larghe costituisce già con buona approssimazione uno schermo elettrostatico.

Condensatori

Come già visto, tra le due armature di un condensatore si verifica un perfetto accoppiamento elettrostatico, che non è turbato dalla presenza di eventuali altri conduttori. Le cariche che si formano sulle armature di un condensatore sono uguali e di segno opposto: $Q_2 = -Q_1 = Q$. Un'ottima approssimazione di condensatore è costituita da due conduttori posti a distanza tra loro molto piccola rispetto alla distanza da un qualsiasi altro conduttore (vedi fig. 7). In questo modo è possibile considerare il problema elettrostatico delle due armature del condensatore, trascurando l'influenza di altri conduttori.

La grandezza C , detta capacità del condensatore, viene definita come rapporto tra il valore assoluto della carica posseduta da ciascuna armatura e la differenza di potenziale tra le armature stesse:

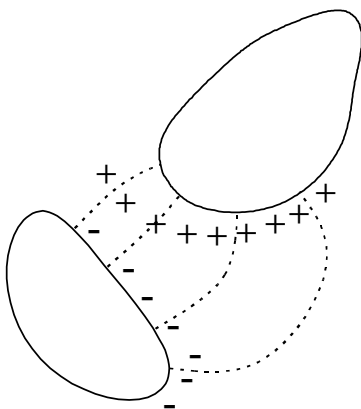


fig. 7

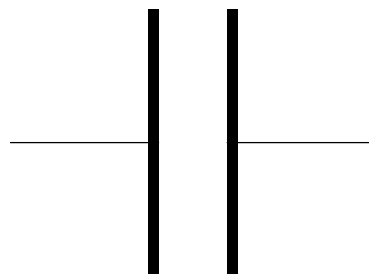


fig. 8

$$C = \frac{Q}{\Delta v}. \quad (16)$$

La capacità di un condensatore dipende unicamente dalla sua geometria e dalla costante dielettrica del mezzo. Il condensatore viene indicato con il simbolo circuitale riportato in fig. 8.

Calcolo della capacità di un condensatore piano.

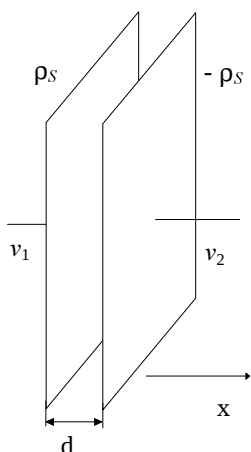


fig. 9

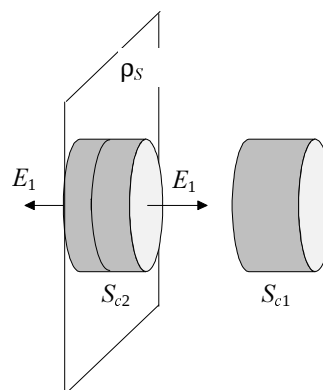


fig. 10

Le armature di un condensatore piano sono costituite da due conduttori piani e paralleli, di superficie S e posti tra loro a distanza d , come illustrato in fig. 9. Trascurando gli effetti di bordo, è possibile supporre che sulle due armature la carica sia distribuita con densità superficiale uniforme ρ_s e $-\rho_s$. Per calcolare il campo di una singola armatura, si faccia riferimento alla fig. 10. Per simmetria, il campo elettrico è diretto perpendicolarmente alla superficie carica. Si applichi allora la 7.6 alla superficie chiusa cilindrica S_{c1} , che contiene carica totale nulla. Il flusso di campo elettrico attraverso le superficie laterale del cilindro è nulla, perché tale superficie è parallela al campo elettrico stesso. Se ne deduce che il flusso di campo elettrico attraverso le due basi del cilindro è uguale, e che quindi il campo elettrico non è funzione della distanza dalla superficie carica. Applicando ora la 7.6 alla superficie S_{c2} , e ragionando in maniera analoga si ottiene:

$$E_1 = \frac{\rho_s}{2\epsilon}.$$

Il campo generato dal condensatore è dato dalla sovrapposizione dei campi dovuti alle due armature, e vale zero nelle regioni esterne ad esse e:

$$E = \frac{\rho_s}{\epsilon}$$

nella regione interna. Dalla (7) si ha inoltre

$$E = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

che integrata fornisce:

$$v_1 - v_2 = \frac{\rho_s d}{\epsilon}.$$

Ricordando che $Q = S\rho_s$, applicando la definizione di capacità si ottiene:

$$C = \frac{Q}{\Delta v} = \frac{\epsilon S}{d}. \quad (17)$$