

Università degli Studi di Bologna
Facoltà di Ingegneria

**LA TECNICA DEL BILANCIAMENTO ARMONICO
COME STRUMENTO PER LA SIMULAZIONE
E L'ANALISI DI STABILITÀ E DI RUMORE
DI SISTEMI NON LINEARI:
DAL CIRCUITO DI POTENZA CON INDUTTORI ISTERETICI
ALL'OSCILLATORE A RADIOFREQUENZA**

Tesi di:
Ing. Diego Masotti

Relatore:
Chiar.mo Prof. Paolo Raffaele Ghigi
Coordinatore:
Chiar.mo Prof. Ugo Reggiani

Dottorato di ricerca in Ingegneria Elettrotecnica
VIII ciclo

Anni accademici 1992/93-1994/95

INDICE

1 - SCOPO DEL LAVORO

- 1.1 - Introduzione pag. 1
- 1.2 - Tecniche di simulazione al calcolatore pag. 1
- 1.3 - Impieghi del metodo del bilanciamento armonico pag. 2

2 - IL METODO DEL BILANCIAMENTO ARMONICO SECONDO LA TECNICA DELLA SCOMPOSIZIONE (O "PIECEWISE" HARMONIC BALANCE (PHB))

- 2.1 - Impiego standard del metodo pag. 4
- 2.2 - Miglioramenti che assicurano la convergenza ad alti livelli
di potenza pag. 7
- 2.3 - Formulazione "estesa" del metodo PHB pag. 11
- 2.4 - Modello di Jiles-Atherton-Deane dell'isteresi ferromagnetica pag. 12

3 - ANALISI DI CIRCUITI CONTENENTI INDUTTORI ISTERETICI

- 3.1 - Riproduzione di cicli di isteresi misurati e/o calcolati nel
dominio dei tempi pag. 15
- 3.2 - Calcolo della curva di prima magnetizzazione con il metodo
PHB pag. 18

4 - OTTIMIZZAZIONE DI CIRCUITI CONTENENTI INDUTTORI ISTERETICI

- 4.1 - La tecnica di ottimizzazione pag. 21
- 4.2 - Ottimizzazione in presenza di induttori isteretici pag. 23

5 - ANALISI DI STABILITÀ DI CIRCUITI CONTENENTI INDUTTORI ISTERETICI

- 5.1 - Analisi di stabilità: confronto tra i metodi pag. 26
- 5.2 - Teoria dell'analisi di stabilità nell'ambito del metodo PHB .. pag. 27
- 5.3 - Esempio di analisi di stabilità locale pag. 31
- 5.4 - Esempi di analisi di stabilità globale pag. 32

6 - OSCILLATORI NON LINEARI

6.1 - Adattamento del PHB al caso autonomo	pag. 41
6.2 - Analisi di stabilità nel caso autonomo	pag. 42
6.3 - Rumore negli oscillatori	pag. 44

1 - SCOPO DEL LAVORO

1.1 - Introduzione

Le non linearità dei circuiti elettrici ed elettronici sono essenzialmente dovute alla natura fisica dei dispositivi che in essi compaiono. Tali non linearità possono essere, in taluni casi, fenomeni indesiderati, perchè causa di disturbi e di scostamenti dal comportamento lineare, ma anche fenomeni indispensabili, in altre circostanze, per la realizzazione di specifiche funzioni. Esempi di quest'ultimo caso sono i convertitori di frequenza, il cui funzionamento dipende dalla presenza di una non linearità che rende disponibili all'uscita i prodotti di intermodulazione dei toni in ingresso; oppure gli oscillatori non lineari, in cui la non linearità consente la nascita dell'oscillazione.

La forte presenza delle non linearità nei circuiti (e nei sistemi) di interesse ingegneristico rende indispensabile disporre di strumenti che consentano di studiarne il comportamento. Diverse circostanze hanno fatto sì che strumenti "software" si imponessero per questo genere di problemi: da un lato le enormi potenzialità raggiunte dagli elaboratori elettronici consentono oggi simulazioni impensabili fino a qualche anno fa, sia per tempo di calcolo, sia per occupazione di memoria; dall'altro l'impossibilità di tarare circuiti sempre più miniaturizzati o l'elevato costo della realizzazione di prototipi costosi hanno spinto verso una sempre più accurata simulazione al calcolatore, sia per eseguire l'analisi del comportamento del circuito, sia per eseguirne la sintesi. Queste esigenze hanno perciò contribuito allo sviluppo della disciplina: Computer Aided Design (CAD).

In questa ottica si inserisce la mia attività di ricerca che ha contraddistinto i tre anni del Dottorato di ricerca: l'analisi e la sintesi di circuiti non lineari con l'ausilio del calcolatore.

1.2 - Tecniche di simulazione al calcolatore

Le principali tecniche di simulazione dei circuiti non lineari possono suddividersi fondamentalmente in tre categorie:

- i) tecniche nel dominio dei tempi;
- ii) serie di Volterra;
- iii) tecniche ibride tempo/frequenza - metodo del bilanciamento armonico.

Sulla base di quelle che sono le esigenze imposte dalla circuiteria di livello ingegneristico, la potenza di un simulatore va valutata tenendo conto del suo comportamento di fronte alle seguenti problematiche:

- a) analisi di sistemi;
- b) analisi di circuiti con deboli non linearità;

- c) analisi di circuiti con forti non linearità;
- d) ottimizzazione di circuiti.

Per quanto riguarda l'analisi di sistemi, il più potente strumento utilizzabile sono le serie di Volterra, purchè le non linearità in gioco siano contenute e purchè si sia disposti ad accettare l'onere computazionale necessario per la valutazione dei nuclei di Volterra. Recenti risultati [1] hanno dimostrato la possibilità di fare uso del metodo del bilanciamento armonico anche per questo genere di problematiche. L'unico settore che il metodo del bilanciamento armonico condivideva con le tecniche di simulazione nel dominio dei tempi è stato, per lungo tempo, l'analisi di circuiti con deboli non linearità. Le problematiche che coinvolgono le forti non linearità sono state considerate da sempre appannaggio dei soli metodi nel dominio dei tempi; gli sviluppi conseguiti nell'ultimo decennio, ivi compreso il contributo di questo lavoro, pongono comunque il metodo del bilanciamento armonico tra i principali candidati anche in questo ambito di analisi. Relativamente al problema di progetto e ottimizzazione di circuiti non lineari il solo metodo del bilanciamento armonico si è dimostrato utilizzabile, almeno fino ad ora, in maniera generale e sistematica.

1.3 - Impieghi del metodo del bilanciamento armonico

Il metodo del bilanciamento armonico è un metodo di simulazione ibrido tempo/frequenza che riduce il problema della simulazione del circuito alla risoluzione di un sistema non lineare algebrico. Grazie alla evoluzione subita in questo decennio, il metodo del bilanciamento armonico si è imposto come valido antagonista delle più tradizionali tecniche di simulazione nel dominio dei tempi. Questo metodo è nato come strumento di uso generale per la simulazione di circuiti non lineari ad alta frequenza [2], [3]: la causa di ciò è la diretta compatibilità della tecnica del bilanciamento armonico con una caratterizzazione nel dominio della frequenza della parte lineare del circuito, che è spesso indispensabile per eseguire una corretta simulazione a frequenze dell'ordine del gigahertz. La parte non lineare viene invece descritta nel dominio dei tempi.

Questo fatto ha diffuso negli ambienti tecnici specializzati la convinzione che l'ambito delle microonde sia l'unico adatto all'impiego della tecnica del bilanciamento armonico. Se poi si aggiunge anche il fatto che la maggior parte degli algoritmi iterativi usati per risolvere i sistemi non lineari presentano seri problemi di convergenza in presenza di alti livelli di potenza, potrebbe sembrare che il metodo del bilanciamento armonico fosse ulteriormente limitato alle sole problematiche dei circuiti debolmente non lineari.

L'azione combinata di queste circostanze ha fatto sì che per lungo tempo altre tecniche non lineari, come l'analisi nel dominio dei tempi, siano state considerate le

uniche adatte a trattare i problemi che coinvolgono sia forti non linearità sia forti eccitazioni, tipici dell'ingegneria elettrica.

Lo scopo di questo lavoro è quello di inserire il metodo del bilanciamento armonico tra i possibili approcci alle applicazioni a bassa frequenza tipiche dell'ingegneria elettrica. Sarà compito delle pagine seguenti dimostrare, in certi casi, l'equivalenza del metodo del bilanciamento armonico e delle tecniche nel dominio dei tempi, in certi altri la convenienza (o la sconvenienza) del primo rispetto alle seconde, in certi altri ancora la insostituibilità del primo con le seconde.

Vorrei qui menzionare che nella fase iniziale del Dottorato ho esplorato altri aspetti del metodo del bilanciamento armonico come strumento di analisi di circuiti non lineari ad alta frequenza. Oggetto dello studio è stato un fenomeno di grande rilievo nei circuiti non lineari: la conversione di frequenza, ossia la valutazione dell'entità degli scambi energetici tra i diversi prodotti di intermodulazione generati dalle non linearità. Sulla base di questo meccanismo è stato possibile descrivere altri due aspetti di primaria importanza nel comportamento dei circuiti non lineari: il rumore e la stabilità. Relativamente al primo aspetto, lo sviluppo di algoritmi ad uopo, come si vedrà nell'ultimo capitolo, ha consentito di condurre analisi di rumore di circuiti forzati ed autonomi, e di sistemi più complessi, giungendo ad un grado di maturità nel settore riconosciuto a livello internazionale [1], [4]. Il discorso sull'analisi di stabilità sarà affrontato più in dettaglio negli ultimi due capitoli, visto che una attenta indagine della recente letteratura scientifica ha messo in luce sia l'importanza dell'analisi di stabilità dei circuiti contenenti induttori non lineari con isteresi [5], sia l'uso del metodo del bilanciamento armonico come strumento di indagine per problematiche di questo tipo [6], [7].

2 - IL METODO DEL BILANCIAMENTO ARMONICO SECONDO LA TECNICA DELLA SCOMPOSIZIONE (O "PIECEWISE" HARMONIC BALANCE (PHB))

2.1 - Impiego standard del metodo

La tecnica del bilanciamento armonico consente la determinazione diretta del regime stazionario del circuito. Al contrario, l'analisi nel dominio dei tempi perviene allo stato stazionario integrando le equazioni del circuito a partire da uno stato iniziale arbitrario, fino all'esaurimento del transitorio. A meno che il comportamento transitorio non sia oggetto di interesse, una simulazione con il metodo del bilanciamento armonico può essere considerevolmente più vantaggiosa, in termini di tempo di calcolo, rispetto ad una simulazione nel dominio dei tempi, specialmente nei casi in cui le costanti di tempo del circuito sono grandi, e quindi la durata del transitorio è molto superiore al periodo.

Consideriamo un circuito non lineare operante in un regime periodico, forzato da una sorgente periodica di frequenza ω_0 (il discorso non perde validità se il circuito è alimentato da un insieme di sorgenti di frequenze incommensurabili: anzi il metodo del bilanciamento armonico è tra i più potenti strumenti di indagine dei regimi multitonali [8]). Ogni segnale $a(t)$ sostenuto dal circuito viene rappresentato da una serie troncata di Fourier della forma:

$$a(t) = \sum_{k=-N}^N A_k \exp(jk\omega_0 t) \quad (2.1)$$

dove N rappresenta il numero totale di armoniche prese in considerazione nel corso dell'analisi. Il coefficiente di Fourier A_k è la cosiddetta **armonica** di $a(t)$ a $k\omega_0$ (o k -esima armonica di $a(t)$). Conseguentemente ogni segnale è rappresentato dall'insieme finito di fasori delle sue componenti spettrali (o armoniche) collocate in corrispondenza delle frequenze appartenenti ad uno spettro discreto e predeterminato. Poichè i segnali che fluiscono nel circuito sono reali, $A_{-k} = A_k^*$ dove * indica il complesso coniugato.

Con il metodo del bilanciamento armonico, l'analisi di un circuito si riduce alla risoluzione di un sistema algebrico non lineare.

Dal punto di vista circuitale esistono due differenti formulazioni del medesimo concetto:

- il metodo *nodale* (Kundert-Sangiovanni-Vincentelli, 1986 [9]);
- il metodo *della scomposizione* (o "*piecewise*") (Nakhla-Vlach, 1976 [10]).

Il metodo nodale considera il circuito come un tutto unico: il sistema risolvibile è ottenuto dalla applicazione delle leggi di Kirchhoff in corrispondenza di tutti i nodi; perciò la dimensione del suddetto sistema è data dal prodotto tra il numero dei nodi del

circuito e il numero delle armoniche. Questa impostazione è conveniente quando il numero dei componenti lineari è contenuto e, conseguentemente, la matrice ammettenza nodale è sparsa (da qui la possibilità di fare uso di solutori per matrici sparse). Il pregio di questo metodo consiste nel fatto che esso fornisce una descrizione globale del circuito, nel senso che, al termine dell'analisi, sono disponibili tutti i valori delle tensioni di nodo e delle correnti di ramo.

Il metodo "piecewise" prevede la scomposizione del circuito in due sottoreti: una lineare ed una non lineare (quest'ultima contenente i dispositivi non lineari) comunicanti attraverso le n_D porte dei dispositivi o porte comuni. Il sistema risolvibile è ottenuto dalla applicazione delle leggi di Kirchhoff in corrispondenza di tutte le porte comuni; perciò la dimensione del sistema risolvibile è data dal prodotto tra il numero delle variabili di stato (in genere uguale al numero di porte comuni) e il numero delle armoniche. Il sistema è più piccolo come dimensioni rispetto al caso precedente, però è fondamentalmente denso, visto che la matrice ammettenza di una rete multiporta non ha zeri strutturali. Un cospicuo vantaggio di questo metodo consiste nel fatto che il tempo di analisi è indipendente dal numero dei nodi della sottorete lineare, ma dipende solo dal numero dei dispositivi non lineari. Questo significa che la descrizione della sottorete lineare può essere particolareggiata fino a qualsiasi livello, senza inficiare il tempo di costo dell'analisi non lineare. L'unico svantaggio di questa impostazione è che il risultato dell'analisi è costituito dalle sole tensioni e correnti alle n_D porte comuni.

Un ulteriore importante aspetto a favore del metodo Piecewise Harmonic Balance (PHB) risiede nella maggiore flessibilità nella descrizione della sottorete non lineare (visto che le non linearità non devono obbligatoriamente essere descritte come generatori di corrente pilotati in tensione, come nel caso nodale). La sottorete non lineare è descritta nel dominio dei tempi, perchè la natura fisica delle non linearità e le equazioni che le rappresentano suggeriscono questo genere di scelta. Le equazioni che la descrivono sono equazioni parametriche generalizzate in funzione di un certo numero di quantità tempo-varianti usate come variabili di stato. La scelta delle variabili rappresentative dello stato del circuito ricade su un insieme di grandezze (in genere le tensioni alle porte) pari al numero delle porte comuni:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{u} \left[\mathbf{x}(t), \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}, \dots, \frac{d^n \mathbf{x}(t)}{dt^n} \right] \\ \mathbf{i}(t) &= \mathbf{w} \left[\mathbf{x}(t), \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}, \dots, \frac{d^n \mathbf{x}(t)}{dt^n} \right] \end{aligned} \tag{2.2}$$

dove:

- \mathbf{x} è il vettore n_D -dimensionale delle variabili di stato;
- $\mathbf{v}(t), \mathbf{i}(t)$ sono i vettori n_D -dimensionali delle tensioni e correnti alle porte comuni;
- \mathbf{u}, \mathbf{w} sono funzioni vettoriali, reali, algebriche di dimensioni n_D .

Entro il livello di approssimazione che si introduce automaticamente considerando gli sviluppi troncati di Fourier, il regime periodico del circuito non lineare, conseguente ad una eccitazione nota, è completamente definito dal vettore di stato \mathbf{X} contenente le parti reale ed immaginaria delle prime $N+1$ armoniche delle variabili di stato (compresa la continua). La dimensione di questo vettore è $N_T = n_D(2N+1)$. Gli elementi di \mathbf{X} sono le incognite del problema ed il loro numero non dipende dal numero dei componenti reattivi contenuti nella sottorete lineare.

Questa descrizione è molto conveniente dal punto di vista fisico, perchè è equivalente ad un insieme di equazioni integro-differenziali implicite nelle tensioni e correnti alle porte, ma è più semplice da gestire dal punto di vista numerico.

La sottorete lineare è rappresentata da una equazione nel dominio della frequenza del tipo:

$$\mathbf{Y}(j\omega) \mathbf{V}(\omega) + \mathbf{I}(\omega) + \mathbf{N}(\omega) = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

dove:

$\mathbf{V}(\omega)$, $\mathbf{I}(\omega)$ sono i vettori dei fasori delle tensioni e delle correnti;

$\mathbf{Y}(j\omega)$ è la matrice ammettenza della sottorete lineare;

$\mathbf{N}(\omega)$ è un vettore di sorgenti di corrente equivalenti secondo Norton, tutti calcolati alla frequenza ω .

Per un dato valore del vettore \mathbf{X} , i secondi membri della (2.2) sono funzioni periodiche del tempo, a valori reali, le cui armoniche $\mathbf{U}_k(\mathbf{X})$, $\mathbf{W}_k(\mathbf{X})$ possono essere efficientemente calcolate con la Fast Fourier Transform.

La combinazione delle (2.3) e delle trasformate delle (2.2) fornisce l'insieme degli **errori di bilanciamento armonico** ad una generica armonica $k\omega_0$:

$$\mathbf{E}_k(\mathbf{X}) \equiv \mathbf{Y}(jk\omega_0) \mathbf{U}_k(\mathbf{X}) + \mathbf{W}_k(\mathbf{X}) + \mathbf{N}(k\omega_0) = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

Nell'ambito del grado di approssimazione accettato, il problema dell'analisi non lineare è ridotto alla risoluzione dell'insieme di equazioni complesse (2.4) per $-N \leq k \leq N$. Per evitare l'uso di frequenze negative, il sistema risolvibile non lineare è formulato in termini dell'insieme \mathbf{E} delle parti reali ed immaginarie dei primi membri delle (2.4) per $0 \leq k \leq N$, ed è quindi scritto come sistema reale di N_T equazioni reali in N_T incognite:

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

Sebbene molti schemi iterativi siano disponibili per la risoluzione di (2.5), il metodo Newton-Raphson è quasi sempre preferito per una serie di ragioni che risulteranno più chiare nel paragrafo successivo. Il valore del vettore incognito ad un generico passo della *iterazione di Newton* è esprimibile tramite la:

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{X}^{(n)} - \{\mathbf{J}[\mathbf{X}^{(n)}]\}^{-1} \mathbf{E}[\mathbf{X}^{(n)}]$$

dove

$\mathbf{X}^{(n)}$ è il valore del vettore incognito \mathbf{X} all'n-esima iterazione;

$\mathbf{J}[\mathbf{X}^{(n)}] = \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{X}} \right)^{(n)}$ è la matrice Jacobiana di \mathbf{E} rispetto a \mathbf{X} , valutata all'n-esima iterazione.

2.2 - Miglioramenti che assicurano la convergenza ad alti livelli di potenza

L'algorithmo iterativo proposto presenta seri problemi di convergenza in corrispondenza di alti livelli di potenza dei segnali di ingresso. I principali fattori che limitano la velocità di convergenza, o che impediscono il raggiungimento della medesima, sono sostanzialmente tre:

- i) combinazione di elevate eccitazioni e forti non linearità dovute ai dispositivi;
- ii) numero dei toni in ingresso;
- iii) aspetti topologici: il numero di dispositivi non lineari e il modo con cui sono interconnessi.

Queste limitazioni sono state le principali cause del lento decollo del metodo del bilanciamento armonico. Il decennio passato ha costituito un periodo di svolta per la tecnica del bilanciamento armonico, in virtù degli accorgimenti introdotti per migliorarne le prestazioni, e che lo rendono oggi un potente strumento di simulazione.

Gli accorgimenti adottabili per migliorare le proprietà di convergenza possono essere di duplice natura:

- di tipo generale:
 - "source stepping";
 - riduzione di norma;
 - modello parametrico per le non linearità;
- specifici per l'iterazione di Newton:
 - calcolo esatto della matrice Jacobiana;
 - uso della norma NU (Newton-Update).

La tecnica del "*source stepping*" (utilizzata con successo anche in alcune analisi di circuiti contenenti induttori non lineari con isteresi) consiste nel raggiungimento del livello di potenza desiderato delle sorgenti mediante una serie di analisi in cascata: ad ogni passo il livello della sorgente viene incrementato e la soluzione ottenuta è utilizzata come punto di partenza per l'analisi del passo successivo. Ciò è particolarmente utile qualora si faccia uso della tecnica iterativa di Newton-Raphson che è convergente in maniera superlineare in prossimità della soluzione, ma è totalmente imprevedibile lontano da essa. La tecnica del "source stepping" è però

computazionalmente inefficiente, a meno che non ci sia uno specifico interesse anche nei risultati delle analisi relative ai valori intermedi di potenza. Oltretutto questo accorgimento non fornisce una soluzione generale del problema, poichè in certi casi mal condizionati il valore dell'incremento di potenza necessario per il raggiungimento della convergenza è troppo piccolo e l'analisi diventa troppo lenta: come caso limite, l'algoritmo fallisce se la dimensione dell'incremento è inferiore alla precisione della macchina.

La tecnica della *riduzione di norma* prevede l'inserimento, nella formula iterativa, del cosiddetto coefficiente di smorzamento, cioè di un parametro scalare che viene aggiornato ad ogni passo dell'iterazione in maniera tale da fornire una riduzione della norma del vettore degli errori rispetto al passo precedente. Con riferimento alla iterazione di Newton, il valore del vettore incognito ad un generico passo assume la seguente espressione:

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{X}^{(n)} - \alpha_n \{ \mathbf{J}[\mathbf{X}^{(n)}] \}^{-1} \mathbf{E}[\mathbf{X}^{(n)}] \quad (2.6)$$

Il *modello parametrico* verte in particolare a far fronte alle difficoltà di convergenza legate alla forte non linearità introdotta dalla corrente di conduzione di una giunzione p-n, ma l'idea base può essere utilizzata anche in presenza di non linearità che presentano un analogo legame tensione-corrente. Un qualunque metodo, basato sul calcolo delle derivate degli errori rispetto alle variabili di stato, si trova in grossa difficoltà al variare dei valori della tensione (assunta come variabile di stato) in prossimità del gomito della caratteristica in conduzione diretta: in corrispondenza di piccole variazioni della variabile di stato si hanno forti picchi di corrente, difficilmente governabili da qualunque tecnica iterativa.

Con il modello parametrico è prevista una scelta non convenzionale della variabile di stato

$$\begin{aligned} x(t) &= v(t) && \text{se } v(t) \leq V_I \\ x(t) &= ai(t) + b && \text{se } V_I < v(t) \end{aligned}$$

ossia, variabile di stato coincidente con la tensione di giunzione al di sotto di un certo valore di soglia, e funzione lineare della corrente di conduzione al di sopra della soglia. Le equazioni parametriche che ne conseguono sono:

$$\begin{aligned} v = u(x) &= \begin{cases} x & x \leq V_I \\ V_I + \frac{I}{a} \ln[1 + a(x - V_I)] & V_I < x \end{cases} \\ i = w(x) &= \begin{cases} I_s [\exp(ax) - 1] & x \leq V_I \\ I_s \exp(aV_I) [1 + a(x - V_I)] - I_s & V_I < x \end{cases} \end{aligned}$$

L'aspetto importante è che tali equazioni descrivono esattamente l'equazione della giunzione, per mezzo di funzioni che sono ben condizionate per qualunque combinazione di valori di tensione e di corrente.

Per quanto riguarda i miglioramenti specifici per l'iterazione di Newton il ruolo di primaria importanza è rivestito dal *calcolo della matrice Jacobiana per via analitica*, anzichè per via perturbativa. L'inserimento di questo accorgimento ha il duplice vantaggio di rendere l'iterazione più veloce e molto più accurata: infatti le derivate numeriche calcolate con metodi perturbativi tendono a degradarsi al crescere del numero di dispositivi non lineari e/o delle armoniche. In prima approssimazione è possibile affermare che il numero delle iterazioni necessarie affinché una analisi raggiunga la convergenza è inversamente legato alla precisione con la quale è calcolata la matrice Jacobiana, cosicchè, al di sotto di una certa soglia della precisione, la convergenza diviene più lenta o addirittura impossibile.

La matrice Jacobiana analitica è ordinata rispetto alle frequenze, e partizionata in sottomatrici di dimensioni $2n_D \times 2n_D$ della forma:

$$\mathbf{J}_{k,s} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \text{Re}[\mathbf{E}_k]}{\partial \text{Re}[\mathbf{X}_s]} & \frac{\partial \text{Re}[\mathbf{E}_k]}{\partial \text{Im}[\mathbf{X}_s]} \\ \frac{\partial \text{Im}[\mathbf{E}_k]}{\partial \text{Re}[\mathbf{X}_s]} & \frac{\partial \text{Im}[\mathbf{E}_k]}{\partial \text{Im}[\mathbf{X}_s]} \end{bmatrix} \quad (0 \leq k, s \leq N)$$

dove \mathbf{X}_s è il sottoinsieme di \mathbf{X} contenente le parti reale ed immaginaria delle s -esime armoniche delle variabili di stato.

Per completezza è riportato l'algoritmo per il calcolo delle derivate analitiche, che fornisce formule generali per l'analisi PHB. Dalle (2.4) si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial \text{Re}[\mathbf{X}_s]} &= \mathbf{Y}(jk\omega_0) \frac{\partial \mathbf{U}_k}{\partial \text{Re}[\mathbf{X}_s]} + \frac{\partial \mathbf{W}_k}{\partial \text{Re}[\mathbf{X}_s]} \\ \frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial \text{Im}[\mathbf{X}_s]} &= \mathbf{Y}(jk\omega_0) \frac{\partial \mathbf{U}_k}{\partial \text{Im}[\mathbf{X}_s]} + \frac{\partial \mathbf{W}_k}{\partial \text{Im}[\mathbf{X}_s]} \end{aligned}$$

Perciò il problema è ridotto al calcolo delle derivate delle armoniche \mathbf{U}_k e \mathbf{W}_k . Relativamente al caso delle tensioni (per es.), è necessario introdurre prima le espansioni di Fourier:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}_m} = \sum_{p=-2N}^{2N} \mathbf{C}_{m,p} \exp(jp\omega_0 t) \quad (2.7)$$

dove:

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}$$

$$\mathbf{y}_m = d^m \mathbf{x} / dt^m \quad (1 \leq m \leq n)$$

Le derivate delle armoniche U_k rispetto alle parti reale ed immaginaria delle armoniche delle variabili di stato sono ora ottenibili dalla prima delle (2.2) per $0 \leq k, s \leq N$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_k}{\partial \operatorname{Re}[\mathbf{X}_s]} &= \sum_{m=0}^n (js\omega_0) [C_{m,k-s} + (-1)^m C_{m,k+s}] \\ \frac{\partial U_k}{\partial \operatorname{Im}[\mathbf{X}_s]} &= \sum_{m=0}^n j(js\omega_0) [C_{m,k-s} - (-1)^m C_{m,k+s}] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ovviamente le derivate delle correnti si trovano in maniera del tutto analoga.

Lo scopo di ogni iterazione dell'algorithmo di Newton a riduzione di norma è quello di minimizzare la norma del vettore degli errori di bilanciamento armonico lungo la direzione definita dalla (2.6). La definizione di norma adottata è la *norma Newton-Update (NU)* introdotta da Yeager e Dutton [11]. La norma NU è la norma euclidea della correzione di Newton calcolata nel nuovo punto, cioè:

$$\|E[\mathbf{X}^{(n+1)}]\|_{NU} \equiv \|J[\mathbf{X}^{(n+1)}]^{-1} E[\mathbf{X}^{(n+1)}]\|_{l_2}$$

Il vantaggio di questa norma, rispetto alla norma euclidea, consiste nel fatto che gli errori residui sono pesati dagli elementi dell'inversa della matrice Jacobiana, prima di calcolare la norma euclidea. Il modulo di un generico elemento del vettore risultante indica quanto la corrispondente incognita sia lontana dal raggiungimento della convergenza, e può così essere interpretato come una misura della priorità relativa di questa incognita nell'ambito della singola iterazione.

L'iterazione di Newton, basata sul metodo del bilanciamento armonico e facente uso degli accorgimenti sopra descritti, costituisce un algorithmo molto più robusto delle classiche tecniche usate per la risoluzione di sistemi non lineari, come i metodi di rilassamento o l'iterazione Newton-Raphson standard [12], [13]. Come sarà dimostrato nel capitolo successivo, questo algorithmo può gestire forti non linearità soggette ad elevate eccitazioni con considerevole velocità di calcolo ed è quindi il principale responsabile delle enormi potenzialità del simulatore utilizzato per ottenere i risultati oggetto di questo lavoro.

2.3 - Formulazione “estesa” del metodo PHB

Nel caso di non linearità particolarmente complesse risulta utile descrivere la sottorete non lineare come un multiporta, caratterizzato nel dominio dei tempi da un insieme di equazioni parametriche generalizzate che consentano al numero delle variabili di stato (n_S) di superare il numero delle porte comuni (n_D). Questa esigenza è nata dal bisogno di descrivere, col metodo del bilanciamento armonico, il modello non lineare della isteresi ferromagnetica di Jiles-Atherton [14]: si tratta comunque di una generalizzazione estendibile a tutti quei modelli non lineari che richiedono l'uso di variabili di stato addizionali. In questo senso si parla di formulazione *estesa* del metodo “piecewise” harmonic balance [15].

Concettualmente questa estensione si riduce all’inserimento di un insieme di equazioni ausiliarie tra le equazioni che descrivono la sottorete non lineare. Perciò le (2.2) sono sostituite dalle

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{u} \left[\mathbf{x}(t), \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}, \dots, \frac{d^n \mathbf{x}(t)}{dt^n} \right] \\ \mathbf{i}(t) &= \mathbf{w} \left[\mathbf{x}(t), \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}, \dots, \frac{d^n \mathbf{x}(t)}{dt^n} \right] \\ \mathbf{0} &= \mathbf{f} \left[\mathbf{x}(t), \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}, \dots, \frac{d^n \mathbf{x}(t)}{dt^n} \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

dove:

\mathbf{x} è il vettore n_S -dimensionale delle variabili di stato;

$\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{i}(t)$ sono i vettori n_D -dimensionali delle tensioni e correnti alle porte comuni;

\mathbf{u} , \mathbf{w} , \mathbf{f} sono funzioni vettoriali, reali, algebriche di dimensioni, rispettivamente, n_D , n_D , n_{S-D} .

Perciò ora la dimensione del vettore dei fasori incogniti \mathbf{X} è $N_T = n_S(2N+1)$.

La descrizione della sottorete lineare non subisce alcuna modifica rispetto alla (2.3).

La presenza delle equazioni ausiliarie si avverte nell'espressione degli errori di bilanciamento armonico. La (2.4), sempre per la generica armonica $k\omega_0$, diventa ora:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k(\mathbf{X}) &\equiv \mathbf{Y}(jk\omega_0) \mathbf{U}_k(\mathbf{X}) + \mathbf{W}_k(\mathbf{X}) + \mathbf{N}(k\omega_0) = \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_k(\mathbf{X}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

dove con $\mathbf{F}_k(\mathbf{X})$ si è indicata la k -esima armonica della funzione del tempo che definisce l'equazione ausiliaria.

Diretta conseguenza di ciò è l'espressione modificata della matrice Jacobiana analitica. La generica sottomatrice di dimensione $2n_s \times 2n_s$ può essere scritta nel seguente modo:

$$\mathbf{J}_{k,s} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \text{Re}[\mathbf{E}_k]}{\partial \text{Re}[\mathbf{X}_s]} & \frac{\partial \text{Re}[\mathbf{E}_k]}{\partial \text{Im}[\mathbf{X}_s]} \\ \frac{\partial \text{Im}[\mathbf{E}_k]}{\partial \text{Re}[\mathbf{X}_s]} & \frac{\partial \text{Im}[\mathbf{E}_k]}{\partial \text{Im}[\mathbf{X}_s]} \\ \frac{\partial \text{Re}[\mathbf{F}_k]}{\partial \text{Re}[\mathbf{X}_s]} & \frac{\partial \text{Re}[\mathbf{F}_k]}{\partial \text{Im}[\mathbf{X}_s]} \\ \frac{\partial \text{Im}[\mathbf{F}_k]}{\partial \text{Re}[\mathbf{X}_s]} & \frac{\partial \text{Im}[\mathbf{F}_k]}{\partial \text{Im}[\mathbf{X}_s]} \end{bmatrix} \quad (0 \leq k, s \leq N)$$

Relativamente al calcolo delle derivate esatte di \mathbf{F}_k , valgono espressioni del tutto analoghe alle (2.8).

2.4 - Modello di Jiles-Atherton-Deane dell'isteresi ferromagnetica

La descrizione matematica dell'isteresi ferromagnetica adottata è basata sul modello proposto da Jiles e Atherton [14], [16], con le modifiche introdotte da Deane [5], [17]. Secondo questo modello, la suscettività magnetica differenziale è espressa in funzione della magnetizzazione totale M e del campo magnetico applicato H nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \frac{dM(H)}{dH} &= \delta_M(1-c) \frac{M_{an}(H+\alpha M) - M(H)}{K(1-c)\text{sgn}\left(\frac{dH}{dt}\right) - \alpha[M_{an}(H+\alpha M) - M(H)]} + \\ &+ c \left. \frac{\partial M_{an}(H+\alpha M)}{\partial H} \right|_{M=\text{cost}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

dove:

$$M_{an}(H+\alpha M) = M_s \left(\coth \frac{H+\alpha M}{a} - \frac{a}{H+\alpha M} \right) \quad \text{magnetizzazione anisteretica};$$

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1 \Leftarrow x > 0 \\ 0 \Leftarrow x = 0 \\ -1 \Leftarrow x < 0 \end{cases} \quad \text{funzione segno};$$

$$\delta_M = \frac{1}{2} \left[1 + \text{sgn} \left\{ [M_{an}(H+\alpha M) - M(H)] \frac{dH}{dt} \right\} \right] \quad \text{fattore di Deane}.$$

Il coefficiente δ_M è il fattore correttivo dovuto a Deane [17], che permette di eliminare alcune soluzioni non fisiche (con tratti a suscettività magnetica negativa) che potrebbero derivare dall'integrazione dell'equazione originale di Jiles-Atherton [16].

Il modello sopra riportato dipende da cinque parametri: c , α , K , M_s , a .

Tramite la (2.10) si può dimostrare che c rappresenta il rapporto tra la suscettività differenziale totale iniziale e la suscettività anisteretica iniziale; M_s è la magnetizzazione di saturazione del materiale; le altre tre sono essenzialmente quantità determinate empiricamente (in particolare K è il parametro che influenza direttamente la larghezza del ciclo di isteresi).

Lo scopo di questo studio è l'inserimento del dispositivo non lineare induttore isteretico all'interno dello strumento di simulazione circuitale descritto nei precedenti paragrafi. Affinchè ciò sia possibile bisogna fornire le equazioni del dispositivo in accordo con le convenzioni del metodo PHB.

Supponiamo che il dispositivo sia costituito da n_t spire avvolte attorno ad un nucleo di materiale ferromagnetico di sezione A e lunghezza L . Sulla base delle equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo è possibile dare le seguenti espressioni alla tensione ed alla corrente all'unica porta dell'induttore:

$$\begin{aligned} v(t) &= \mu_0 n_t A \left[\frac{dH(t)}{dt} + \frac{dM(t)}{dt} \right] \\ i(t) &= \frac{L}{n_t} H(t) \end{aligned} \tag{2.11}$$

dove H ed M sono legate tra loro tramite il modello di Jiles-Atherton.

Nonostante l'induttore non lineare sia un monoporta ($n_D=1$), a causa della complessità del modello dell'isteresi, è conveniente formulare le equazioni di stato seguendo lo schema (2.9), facendo uso di due variabili di stato ($n_S=2$) e un vincolo ausiliario ($n_S-n_D=1$).

La scelta naturale per le variabili di stato sarebbe $x_1(t) = H(t)$, $x_2(t) = M(t)$. Le prime simulazioni eseguite hanno suggerito però una variazione nella scelta, che ha migliorato notevolmente le capacità di convergenza dell'iterazione di Newton, garantendo il non superamento della M_s da parte della $M(t)$:

$$\begin{aligned} H(t) &= x_1(t) \\ M(t) &= \frac{2}{\pi} M_s \operatorname{atan} \left[x_2(t) \right] \equiv m \left[x_2(t) \right] \end{aligned} \tag{2.12}$$

Una volta definite le variabili di stato è possibile assegnare l'espressione definitiva alle (2.11) che diventano ora:

$$\begin{aligned}
v(t) &= \mu_0 n_t A \left[\frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{2}{\pi} \frac{M_s}{1+x_2^2(t)} \frac{dx_2(t)}{dt} \right] \\
i(t) &= \frac{L}{n_t} x_1(t)
\end{aligned} \tag{2.13a}$$

Per completare il modello secondo le (2.9) è necessario trasformare la (2.10) in una equazione di vincolo ausiliaria del tipo:

$$f \left[x_1(t), x_2(t), \frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt} \right] = 0$$

Dal punto di vista numerico, l'unico aspetto insoddisfacente del modello dell'isteresi ferromagnetica è la presenza della funzione non continua $sgn(x)$. Mentre le funzioni u , w e f non devono obbligatoriamente essere continue dal punto di vista del bilanciamento armonico, questo requisito è indispensabile per il calcolo della matrice Jacobiana per via analitica. L'eliminazione della discontinuità avviene mediante la sostituzione della funzione segno con la funzione:

$$S(x, Q) = \frac{2}{\pi} \operatorname{atan}(Qx)$$

che tende alla funzione segno per Q tendente all'infinito.

Queste posizioni permettono di dare all'equazione ausiliaria la seguente e definitiva espressione:

$$\begin{aligned}
f &= -\frac{2}{\pi} \frac{M_s}{1+x_2^2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{dx_1}{dt} \\
&\left[\delta_M (1-c) \frac{M_{an}[x_1 + \alpha m(x_2)] - m(x_2)}{K(1-c)S\left(\frac{dx_1}{dt}, Q\right) - \alpha \{M_{an}[x_1 + \alpha m(x_2)] - m(x_2)\}} + c \frac{\partial M_{an}[x_1 + \alpha m(x_2)]}{\partial x_1} \right]
\end{aligned} \tag{2.13b}$$

dove con δ_M si intende l'approssimazione continua del fattore di Deane:

$$\delta_M = \frac{1}{2} \left[1 + S \left(\{M_{an}[x_1 + \alpha m(x_2)] - m(x_2)\} \frac{dx_1}{dt}, Q \right) \right]$$

In teoria, per ogni circuito dovrebbe essere condotta l'analisi di bilanciamento armonico per valori crescenti di Q fino a che è garantita la convergenza. In pratica, si è verificato che $Q \approx 10^5$ fornisce risultati virtualmente asintotici e contemporaneamente elimina i malcondizionamenti nel calcolo della matrice Jacobiana analitica.

In conclusione le (2.13) rappresentano la forma assunta dalle (2.9) nel caso specifico dell'induttore non lineare con isteresi.

3 - ANALISI DI CIRCUITI CONTENENTI INDUTTORI ISTERETICI

3.1 - Riproduzione di cicli di isteresi misurati e/o calcolati nel dominio dei tempi

Il più semplice esempio di analisi, che comunque consente di verificare la validità dell'approccio computazionale concepito, è il calcolo del ciclo di isteresi di un materiale ferromagnetico. Per questo scopo, un induttore isteretico è inserito nel semplicissimo circuito riportato nella Fig. 3.1:

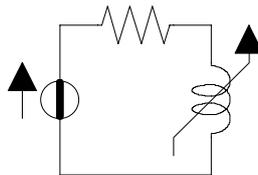


Fig. 3.1

in cui l'alimentazione è costituita da un generatore di tensione sinusoidale a 50 Hz.

Il numero di armoniche utilizzato nelle analisi è relativamente alto (tipicamente $N=32$), a causa della forte non linearità contenuta nel modello di Jiles-Atherton-Deane.

Per tracciare il ciclo di isteresi calcolato è sufficiente riportare i valori di M in funzione dei valori di H : per fare ciò si deve fare uso delle (2.12) e campionare i suddetti valori in un periodo della armonica fondamentale.

Come primo esempio applicativo si è fatto riferimento al materiale definito dal seguente insieme di parametri [16]:

$$\begin{aligned}c &= 0.1 \\ \alpha &= 0.001 \\ K &= 2000 \text{ A/m} \\ M_s &= 1.7 \text{ MA/m} \\ a &= 1000 \text{ A/m}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Il circuito è eccitato in maniera tale da fornire come massimo di $H(t)$ il valore $H_{max} = 10 \text{ kA/m}$.

In termini di tempo, le prestazioni del simulatore per raggiungere la convergenza sono molto soddisfacenti: 10 secondi su una SPARCstation 10, a partire da armoniche tutte nulle (il che è garanzia del fatto che l'algoritmo è ben condizionato).

Le forme d'onda a regime del campo magnetico e della magnetizzazione sono riportate in Fig. 3.2, relativamente ad un periodo della fondamentale.

In Fig. 3.3 il ciclo di isteresi è confrontato con il risultato della integrazione nel dominio dei tempi della equazione differenziale (2.10), ottenuto in [16]. Dalla figura è possibile ricavare l'ottimo accordo tra i due andamenti. La medesima figura riporta

anche una famiglia di cicli minori di isteresi, generati da una serie di analisi di bilanciamento armonico in cascata, utilizzando la tecnica del "source stepping". Queste analisi dimostrano che l'inserimento del fattore δ_M nella (2.10) elimina completamente le soluzioni non fisiche a suscettività differenziale negativa [16], [18]. L'aspetto in questione è sottolineato dalla Fig. 3.4 in cui i cicli minori di isteresi, relativi a valori molto piccoli di H_{max} sono ottenuti senza incontrare malcondizionamenti numerici.

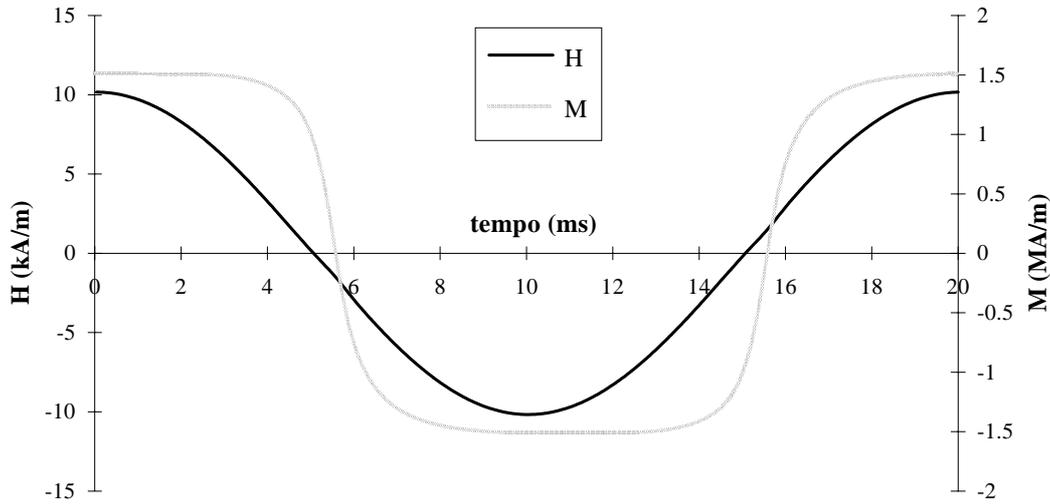


Fig. 3.2

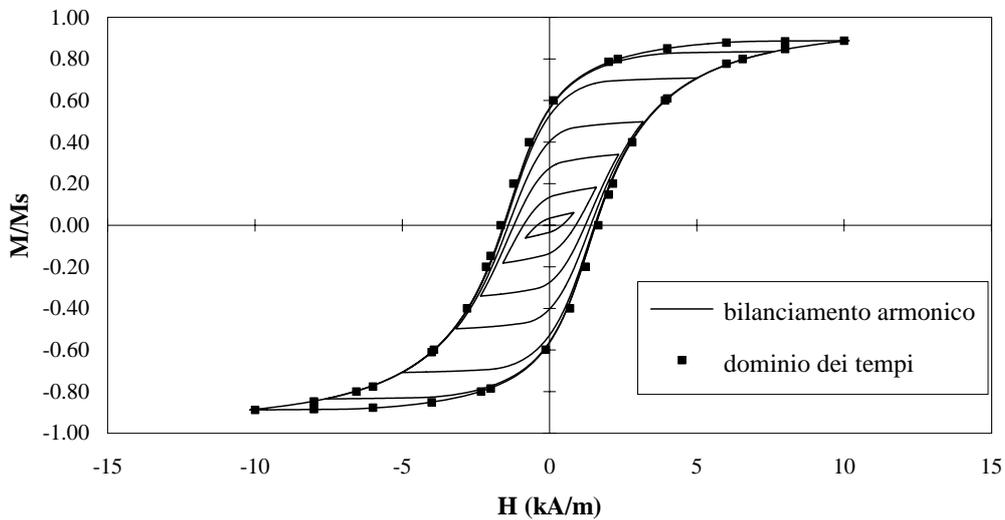


Fig. 3.3

Per i valori più piccoli di H_{max} , i cicli di isteresi si riducono virtualmente a segmenti di retta, la cui pendenza corrisponde al valore di suscettività differenziale ottenuta linearizzando il secondo membro della (2.10) in un intorno dell'origine, cioè a:

$$\chi_{lin} \approx \frac{cM_s}{3a}$$

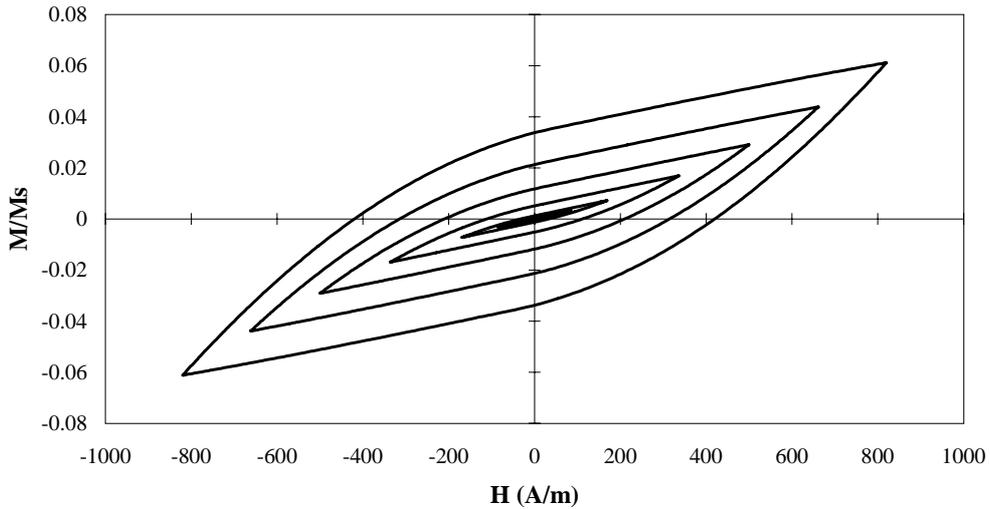


Fig. 3.4

Per ottenere i risultati riportati nelle Figg. 3.3 e 3.4 sono stati necessari soli 26 secondi su una SPARCstation 10: in questo modo si ha una ulteriore verifica dell'efficienza numerica della tecnica del bilanciamento armonico, e del vantaggio, in termini di tempo di calcolo, conseguente all'utilizzo della tecnica del "source stepping", laddove (come in questo caso) si abbia interesse a sfruttare tutti i risultati delle analisi successive.

A suffragio della validità del modello inserito nel simulatore, si sono riprodotti i cicli di isteresi misurati di alcuni materiali ferromagnetici [16], ottenendo, anche in questo caso, un ottimo accordo tra dati misurati e dati simulati (Fig. 3.5).

Una analisi di bilanciamento armonico fornisce quasi gratuitamente l'interessante informazione delle perdite associate al ciclo di isteresi. Infatti, la potenza attiva fornita all'induttore isteretico è esprimibile tramite la:

$$P_A = 2 \sum_{k=1}^N \text{Re} [V_k I_k^*]$$

dove V_k e I_k sono le armoniche di tensione e di corrente alla porta dell'induttore, che il metodo PHB produce una volta raggiunta la convergenza. Visto che l'unica causa di dissipazione nel dispositivo, descritto dalle (2.13) è l'isteresi, il calcolo della quantità $2\pi P_A / \omega_0$ fornisce direttamente una misura delle perdite in un ciclo di isteresi, senza richiedere il calcolo dell'area del ciclo stesso. La Fig. 3.6 fornisce un grafico delle perdite per isteresi in funzione di H_{max} per il materiale ferromagnetico definito dalle (3.1): in figura, i quadratini rappresentano i cicli riportati nelle Figg. 3.3 e 3.4.

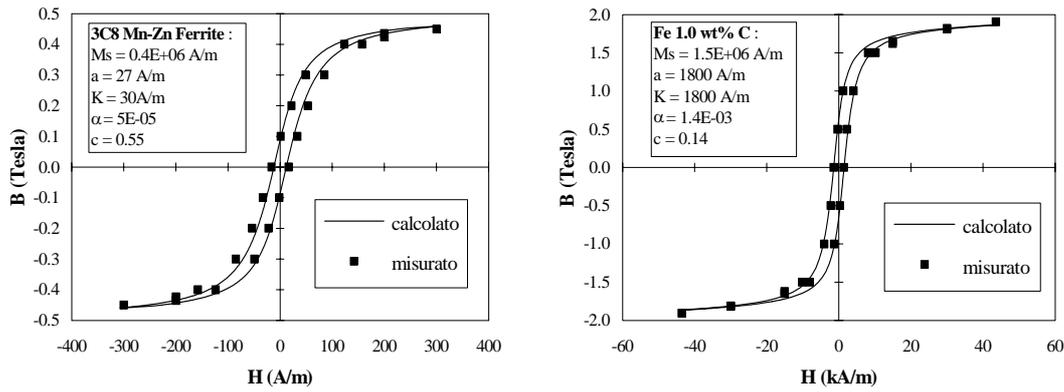


Fig. 3.5

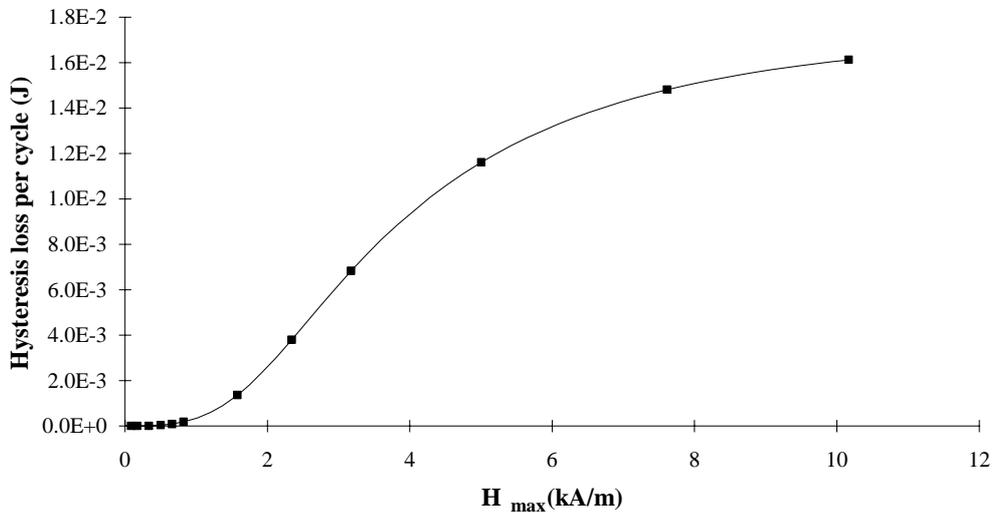


Fig. 3.6

3.2 - Calcolo della curva di prima magnetizzazione con il metodo PHB

L'ottimo comportamento dell'algorithm PHB anche per piccoli valori di H_{max} consente di utilizzare un approccio per il calcolo della curva di prima magnetizzazione basato sul metodo del bilanciamento armonico, nonostante il carattere transitorio di questo aspetto del comportamento del materiale. Infatti, una approssimazione della curva di prima magnetizzazione (la cosiddetta curva di prima magnetizzazione "normale") può essere generata dalla connessione dei vertici di una famiglia di cicli di isteresi, ottenuti variando il valore di H_{max} . Per il materiale descritto dalle (3.1), e facendo uso dei risultati forniti dalle Figg. 3.3 e 3.4, si ottiene la curva di prima magnetizzazione normale di Fig. 3.7 (impiegando, ovviamente, lo stesso tempo necessario a descrivere le curve delle Figg. 3.3 e 3.4).

Una alternativa interessante, dal solo punto di vista concettuale per via dell'elevato tempo di calcolo, consiste nell'alimentare l'induttore non lineare con una forma d'onda periodica tale da farlo transire periodicamente da uno stato smagnetizzato ad uno stato stazionario di magnetizzazione dato dal ciclo di isteresi con completa saturazione. Un possibile andamento della forma d'onda di ingresso è mostrato in Fig. 3.8. Supponiamo che $a(t)$ nella (2.1) sia la forma d'onda di Fig. 3.8. Per poter condurre una analisi di bilanciamento armonico, è necessario determinare le armoniche della forma d'onda di ingresso mediante uno sviluppo in serie di Fourier. Se N è il numero di armoniche scelto per l'analisi, il circuito sarà alimentato da un insieme di N generatori sinusoidali di tensione, di frequenza $k\omega_0$ ($0 \leq k \leq N$) le cui tensioni impresse sono descritte dai fasori $2A_k$. L'unico svantaggio di questo approccio consiste nella lentezza che contraddistingue questo genere di analisi, a causa dell'elevato numero di armoniche (tipicamente dell'ordine di 200) necessario per garantire una buona approssimazione dell'onda di ingresso. Un fatto degno di nota è che il materiale, sottoposto all'eccitazione descritta in Fig. 3.8 (priva della componente in continua), conserva una piccola quantità di magnetizzazione negativa alla fine del transitorio di spegnimento, a causa della sua natura isteretica. Per cancellare questa magnetizzazione residua, la forma d'onda di ingresso deve essere leggermente traslata mediante l'aggiunta di una piccola tensione positiva in continua. Senza questo accorgimento la curva di prima magnetizzazione fornita da una analisi col metodo PHB non passerebbe per l'origine. La curva risultante è riportata in Fig. 3.7, contemporaneamente alla curva di prima magnetizzazione "normale" e ad una terza curva generata dalla integrazione nel dominio dei tempi della equazione differenziale (2.10). Nonostante esistano alcune lievi discrepanze tra le tre curve, l'accordo può considerarsi soddisfacente per qualunque scopo pratico.

L'analisi di una fase transitoria con il metodo del bilanciamento armonico, nonostante l'inefficienza computazionale, è comunque un fatto degno di nota, in quanto permette di sottolineare la versatilità di questo strumento di simulazione concepito per gestire fenomeni di regime.

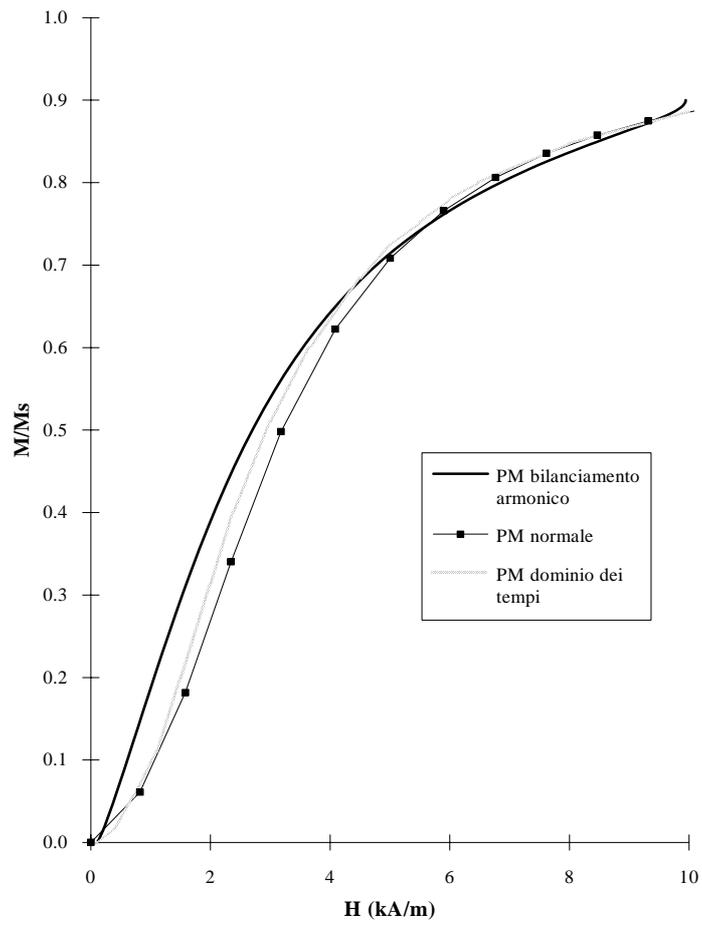


Fig. 3.7

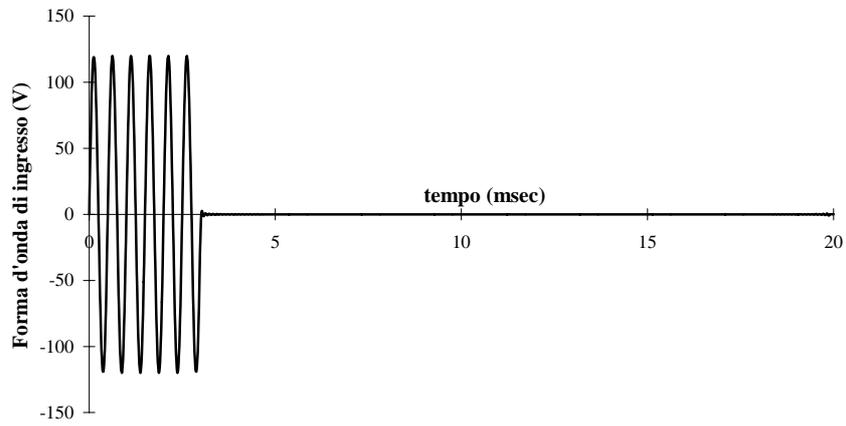


Fig. 3.8

4 - OTTIMIZZAZIONE DI CIRCUITI CONTENENTI INDUTTORI ISTERETICI

4.1 - La tecnica di ottimizzazione

Un completo strumento di simulazione deve poter consentire l'ottimizzazione o la sintesi di un circuito: deve essere possibile migliorare le prestazioni (elettriche o di altra natura [19]) di un circuito assegnato o addirittura ad una topologia circuitale soddisfacente determinate specifiche di progetto.

La tecnica del bilanciamento armonico risulta essere particolarmente adatta allo scopo. Infatti, tra i moderni algoritmi di ottimizzazione, quelli basati sul calcolo del gradiente dell'obiettivo sono di gran lunga i più robusti ed efficienti. A sua volta, l'efficienza e l'accuratezza con cui le derivate parziali sono valutate ha un'influenza grandissima sul numero di iterazioni e sulla effettiva capacità di convergenza dell'iterazione. Ne consegue la necessità di disporre di tecniche per il calcolo esatto del gradiente della funzione obiettivo rispetto ai parametri di progetto. Tecniche di questo tipo richiedono sempre il calcolo della matrice Jacobiana del regime elettrico del circuito rispetto alle variabili di stato e la sua fattorizzazione. Nel caso che l'analisi non lineare sia eseguita mediante la tecnica del bilanciamento armonico tramite una iterazione di Newton, la matrice Jacobiana fattorizzata è automaticamente disponibile al termine dell'analisi stessa. L'integrazione dell'analisi PHB con l'ottimizzazione basata sul gradiente si presenta quindi particolarmente diretta ed efficiente.

Lo strumento di simulazione utilizzato fa ricorso ad un tecnica di ottimizzazione del tipo "a doppio loop": il loop *interno* risolve il circuito con una iterazione di Newton, calcola l'obiettivo e il relativo gradiente come sopra indicato; il loop *esterno* minimizza l'obiettivo con un algoritmo *quasi-Newton* o *Levenberg*.

Il loop interno si occupa della risoluzione del sistema non lineare algebrico (2.5) che qui può essere riscritto tramite la

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

dove:

\mathbf{E} ed \mathbf{X} conservano il loro significato;

\mathbf{P} rappresenta un insieme di parametri fisici od elettrici del circuito, cui si dà il ruolo di variabili di ottimizzazione.

Il processo di ottimizzazione può essere visto come la ricerca di un insieme di valori di \mathbf{P} per cui le specifiche sono soddisfatte nel miglior modo possibile, soggetto al vincolo che lo stato \mathbf{X} coincida con la varietà $\mathbf{M} \equiv [\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{P})]$ implicitamente definita dalla (4.1).

Una generica specifica di progetto è esprimibile nella forma:

$$F_{min}^{(i)} \leq F^{(i)}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \quad (4.2)$$

dove $F^{(i)}(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ è la funzione di rete da ottimizzare.

Per una funzione obiettivo di tipo "least-pth bilatera", alla diseuguaglianza (4.2) è associata la funzione errore

$$E^{(i)}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = w^{(i)} \cdot [F_{min}^{(i)} - F^{(i)}(\mathbf{X}, \mathbf{P})] \quad (4.3)$$

dove $w^{(i)}$ è un peso positivo. Infine, se E_{max} è l'errore massimo (in senso algebrico), la funzione obiettivo è data tramite la

$$F_{ob}(\mathbf{P}) = \begin{cases} E_{max} \geq 0: \\ \left\{ \sum_i^+ [E^{(i)}(\mathbf{X}(\mathbf{P}), \mathbf{P})]^p \right\}^{1/p} \\ E_{max} < 0: \\ - \left\{ \sum_i [-E^{(i)}(\mathbf{X}(\mathbf{P}), \mathbf{P})]^{-p} \right\}^{-1/p} \end{cases} \quad (4.4)$$

dove:

l'apice + indica che la sommatoria è estesa ai soli errori positivi;

$p > 1$.

Per la minimizzazione della funzione obiettivo rispetto a \mathbf{P} , l'utilizzo di una formula esatta per il calcolo del gradiente è essenziale al fine di ottenere buone prestazioni. A partire dalle (4.3) e (4.4), la derivata della funzione obiettivo rispetto ad una generica variabile di ottimizzazione P è direttamente legata alle derivate della funzione di rete $F^{(i)}$ rispetto alla stessa quantità:

$$\frac{DF^{(i)}}{DP} = \frac{\partial F^{(i)}}{\partial P} \Big|_{\mathbf{X}=const} + \left(\frac{\partial F^{(i)}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \Big|_{\mathbf{P}=const} \cdot \frac{D\mathbf{X}}{DP} \quad (4.5)$$

dove con il simbolo D si indica la derivata calcolata sulla varietà \mathbf{M} .

In teoria sono disponibili metodi esatti per il calcolo di tutti i termini del secondo membro della (4.5) [20]. Consideriamo il solo sviluppo del terzo termine:

$$\frac{D\mathbf{X}}{DP} = -[\mathbf{J}(\mathbf{X})]^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial P} \Big|_{\mathbf{X}=const}$$

da cui è evidente la necessità di dover utilizzare la matrice Jacobiana fattorizzata.

E' importante osservare che la tecnica del bilanciamento armonico consente la determinazione diretta del regime stazionario del circuito. In molti problemi ingegneristici le specifiche di progetto sono formulate in termini di grandezze caratteristiche dello stato stazionario (come potenza attiva, rendimento, fattore di

potenza, ecc.); l'impiego del bilanciamento armonico per il calcolo dell'obiettivo risulta allora estremamente vantaggioso, soprattutto se si pensa all'alternativa nel dominio dei tempi: in quel caso, pervenire allo stato stazionario significa integrare le equazioni del circuito a partire da uno stato iniziale arbitrario fino all'esaurimento del transitorio.

4.2 - Ottimizzazione in presenza di induttori isteretici

Il modello di induttore saturabile con isteresi descritto nel capitolo 3 è stato integrato come componente di libreria all'interno del simulatore che utilizza la tecnica del bilanciamento armonico e che consente l'ottimizzazione circuitale.

L'utente dello strumento di simulazione può descrivere un circuito di potenza di complessità arbitraria al livello di inserimento dati, trovare il regime stazionario corrispondente, e chiedere al programma di determinare un certo numero di componenti della sottorete lineare, in maniera tale che il comportamento a regime del circuito soddisfi un insieme di specifiche di progetto.

Come esempio di applicazione, consideriamo il circuito descritto in Fig. 4.1, che può essere interpretato come il circuito equivalente semplificato di un trasformatore trifase.

I rami (R_i , L_i) rappresentano il carico ($1 \leq i \leq 3$), le L_{pi} , L_{si} modellano i flussi dispersi del primario e del secondario, rispettivamente, e gli induttori L_{Mi} sono induttori non lineari, descritti dal modello di Jiles-Atherton con i parametri riportati nelle (3.1). I resistori sono usati per modellare varie cause di perdite ohmiche, e le C_i rappresentano le capacità di rifasamento.

La potenza nominale di ingresso è 260 kVA, a riprova del fatto che il metodo del bilanciamento armonico può gestire forti non linearità in presenza di alti livelli di potenza.

Per enfatizzare gli effetti delle non linearità, supponiamo che il circuito descritto in Fig. 4.1 sia eccitato da una terna simmetrica di segnali sinusoidali di ampiezza variabile. Lo scopo è quello di determinare, in corrispondenza di ogni livello di potenza entrante, i valori delle capacità di rifasamento per i quali l'impedenza totale di ingresso è reale.

A bassi livelli di potenza il problema è semplice, poichè il circuito si comporta in maniera pressochè lineare (come è già stato messo in luce nella Fig. 3.4): infatti, l'impedenza di ingresso può essere calcolata utilizzando le convenzionali tecniche di calcolo dei circuiti lineari, per cui le reattanze di rifasamento richieste sono ricavabili direttamente.

Le difficoltà insorgono ad alti livelli di potenza, perchè l'impedenza di ingresso diventa non lineare per la presenza degli induttori isteretici ed è influenzata anche dalla

presenza delle capacità di rifasamento. In questo caso, il problema può essere risolto solo mediante una ottimizzazione numerica in cui le variabili di progetto sono le C_j .

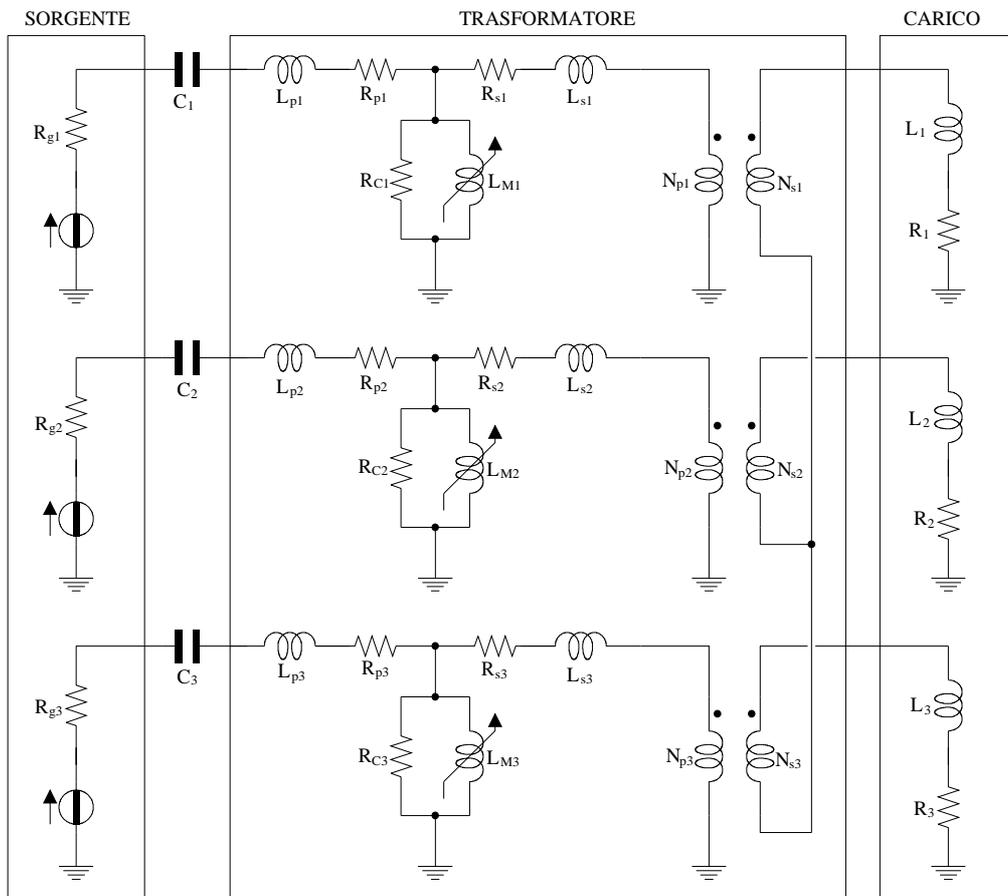


Fig. 4.1

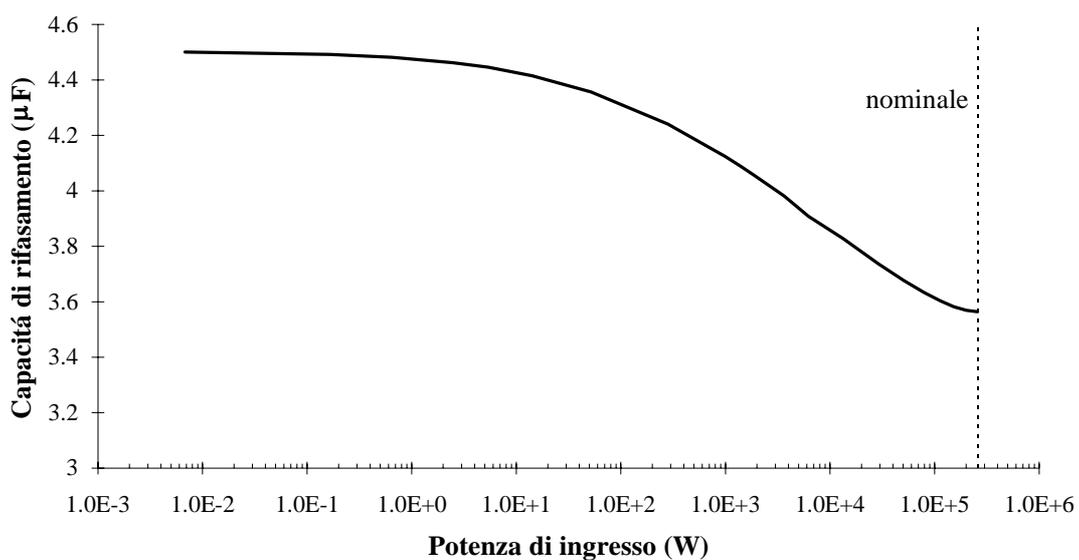


Fig. 4.2

Nel caso specifico, la funzione di rete, sulla base della quale è costituita la funzione obiettivo, è il modulo della reattanza totale di ingresso: mediante l'algoritmo quasi-Newton [21] si è minimizzato l'obiettivo, fino al raggiungimento dei risultati mostrati in Fig. 4.2

La figura mostra il valore comune delle tre capacità in funzione della potenza di ingresso: il cambiamento tra il funzionamento per piccoli segnali e il livello nominale della potenza del trasformatore è di circa il 21%.

Un aspetto importante da sottolineare, deducibile da una semplice analisi del circuito di Fig. 4.1, consiste nel numero di variabili di stato necessarie ai fini di una simulazione del circuito: infatti, con il metodo del bilanciamento armonico, sono sufficienti 6 variabili di stato (2 per ogni induttore non lineare); al contrario, con un metodo nel dominio dei tempi sarebbe necessaria una variabile di stato addizionale per ogni componente reattivo della sottorete lineare, per un totale di 18 variabili di stato. Questa considerazione permette di affermare che, all'aumentare della complessità della sottorete lineare, il metodo del bilanciamento armonico è più conveniente delle tecniche che agiscono nel dominio dei tempi, anche se si tratta di eseguire una analisi circuitale.

5 - ANALISI DI STABILITÀ DI CIRCUITI CONTENENTI INDUTTORI ISTERETICI

5.1 - Analisi di stabilità: confronto tra i metodi

L'analisi di stabilità dei circuiti contenenti induttori non lineari con isteresi è un problema complesso che ha ricevuto notevole attenzione nella recente letteratura tecnica [5], [17]. Simulazioni nel dominio dei tempi e misure hanno rivelato che anche circuiti molto semplici contenenti un solo induttore, quando eccitati da tensioni periodiche di ampiezza sufficientemente grande, presentano una serie di comportamenti anomali quali salti di stato, divisione di frequenza e zone di comportamento caotico.

È interessante notare che tali comportamenti sono stati osservati, ma non rigorosamente analizzati mediante la teoria matematica delle biforcazioni, a causa del fatto che la complessità dell'equazione differenziale non lineare che descrive l'isteresi del materiale non consente l'applicazione diretta dei consueti metodi di indagine formale della teoria dei circuiti.

Con questo capitolo si intende dimostrare che la tecnica del bilanciamento armonico, affiancata dalla teoria matematica delle biforcazioni, è in grado di colmare questa lacuna, mediante la ricerca per via numerica delle biforcazioni del circuito opportunamente parametrizzato. A tal proposito è degno di nota il fatto che il metodo del bilanciamento armonico offre notevoli vantaggi concettuali rispetto all'analisi nel dominio dei tempi. Infatti, nel dominio dei tempi, a causa del carattere rumoroso della soluzione, dovuto alla indispensabile discretizzazione dell'asse dei tempi, è possibile determinare le sole soluzioni stabili. Il metodo del bilanciamento armonico, invece, consente di determinare anche gli stati instabili del circuito. Questo metodo non fornisce indicazioni dirette sulla stabilità della soluzione trovata e non ne è influenzato, dal momento che l'unico obiettivo dell'analisi è che gli errori di bilanciamento armonico siano nulli; per questo motivo è necessario fare ricorso alla teoria matematica delle biforcazioni allo scopo di determinare la stabilità delle soluzioni.

Per comprendere meglio il significato di questo vantaggio si faccia riferimento al caso di Fig. 5.1, in cui è riportato un possibile tratto del luogo delle soluzioni di un circuito nello spazio degli stati.

T_1 e T_2 rappresentano due particolari biforcazioni, dette "turning point", in corrispondenza delle quali si verifica il passaggio da uno stato stabile ad uno instabile. Nel caso in cui l'analisi di stabilità venga condotta nel dominio dei tempi, è preclusa la possibilità di evidenziare il tratto instabile T_1-T_2 : infatti, muovendosi da sinistra a destra, si descrive il tratto $A-T_1-C-B$ (con un salto da T_1 a C); muovendosi, invece, da destra a sinistra, si descrive il tratto $B-T_2-D-A$ (con un salto da T_2 a D). Non è possibile

quindi rendersi conto dell'esistenza degli stati instabili del ramo T_1-T_2 , nè della natura delle biforcazioni che danno luogo ai salti (e quindi all'esistenza di un ciclo di isteresi).

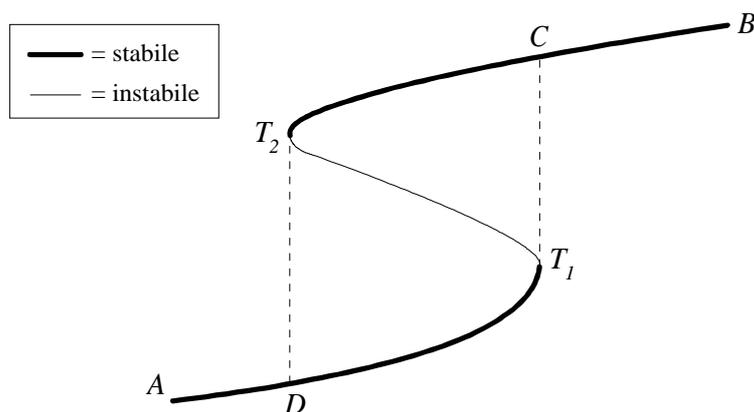


Fig. 5.1

Con il metodo del bilanciamento armonico è invece possibile raggiungere sia soluzioni stabili sia soluzioni instabili, e quindi tracciare un diagramma delle biforcazioni completo. Così come nel dominio dei tempi si ha una soluzione rumorosa, a causa del numero finito di punti di campionamento considerati, anche con il metodo del bilanciamento armonico la soluzione è approssimata, a causa del numero finito di armoniche: però, mentre nel primo caso questa forzata approssimazione impedisce il raggiungimento degli stati instabili, nel secondo caso la soluzione non è rumorosa, ma è affetta da un errore matematico tanto più grande quanto minore è il numero di armoniche usato. Le proprietà qualitative del luogo delle soluzioni in genere si conservano, purchè il numero di armoniche non sia esageratamente piccolo in relazione al problema considerato.

5.2 - Teoria dell'analisi di stabilità nell'ambito del metodo PHB

Lo strumento numerico che consente al metodo del bilanciamento armonico di ottenere questi risultati è una *analisi perturbativa del primo ordine* dello stato stazionario periodico ottenuto con una convenzionale analisi PHB. Supponiamo che lo stato stazionario periodico, indicato con $x_{ss}(t)$, sia perturbato da un piccolo segnale dipendente esponenzialmente dal tempo tramite una frequenza complessa. Poichè, per ipotesi, la perturbazione è piccola, è necessario tenere in conto solo i prodotti di intermodulazione del primo ordine (o bande laterali) del segnale perturbante con le armoniche del regime stazionario. Conseguentemente, lo stato perturbato può essere rappresentato tramite la:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{ss}(t) + \Delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{ss}(t) + \sum_{k=-N}^N \Delta\mathbf{X}_k \exp\{[\sigma + j(\omega + k\omega_0)]t\} \quad (5.1)$$

dove $\Delta \mathbf{X}_k$ è un vettore n_S -dimensionale contenente i fasori delle componenti spettrali delle k -esime bande laterali delle perturbazioni delle variabili di stato. Sostituendo la (5.1) (e le corrispondenti per le tensioni e le correnti alle porte) nelle (2.9) e linearizzando le equazioni della sottorete non lineare in un intorno di \mathbf{x}_{SS} , si ottiene un insieme di equazioni del tipo:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{V}_k &= \sum_{s=-N}^N \mathbf{P}_{k,s} \Delta \mathbf{X}_s \\ \Delta \mathbf{I}_k &= \sum_{s=-N}^N \mathbf{Q}_{k,s} \Delta \mathbf{X}_s \\ \mathbf{0} &= \sum_{s=-N}^N \mathbf{R}_{k,s} \Delta \mathbf{X}_s\end{aligned}\quad (5.2)$$

in cui $\Delta \mathbf{V}_k$, $\Delta \mathbf{I}_k$ sono vettori n_D -dimensionali contenenti i fasori delle componenti spettrali delle k -esime bande laterali delle perturbazioni delle tensioni e delle correnti alle porte, rispettivamente. Facendo uso della (2.7) si ottiene

$$\mathbf{P}_{k,s} = \sum_{m=0}^n \left[\sigma + j(\omega + s\omega_0) \right]^m \mathbf{C}_{m,k-s} \quad (5.3)$$

Espressioni del tutto analoghe valgono anche per $\mathbf{Q}_{k,s}$, $\mathbf{R}_{k,s}$.

Le (5.2) possono essere riscritte in forma matriciale compatta mediante le cosiddette *equazioni di conversione*:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{V} &= \mathbf{P} \Delta \mathbf{X} \\ \Delta \mathbf{I} &= \mathbf{Q} \Delta \mathbf{X} \\ \mathbf{0} &= \mathbf{R} \Delta \mathbf{X}\end{aligned}\quad (5.4)$$

dove \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} sono le matrici di conversione, per le quali si ha:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{-N,-N} & \cdots & \mathbf{P}_{-N,0} & \cdots & \mathbf{P}_{-N,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{P}_{0,-N} & \cdots & \mathbf{P}_{0,0} & \cdots & \mathbf{P}_{0,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{P}_{N,-N} & \cdots & \mathbf{P}_{N,0} & \cdots & \mathbf{P}_{N,N} \end{bmatrix}$$

Il regime perturbato deve soddisfare anche le equazioni della sottorete lineare (2.3) a tutte le bande laterali. In forma matriciale compatta

$$\mathbf{Y}_L(\sigma + j\omega) \Delta \mathbf{V} + \Delta \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (5.5)$$

dove \mathbf{Y}_L è una matrice diagonale a blocchi; le sottomatrici che costituiscono la diagonale sono date dalla matrice ammettenza della sottorete lineare calcolata ad ogni banda laterale, cioè:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_L(\sigma + j\omega) &= \text{diag} \left[\mathbf{Y}(\sigma + j\omega + jk\omega_0) \right] \\ & \quad (-N \leq k \leq N)\end{aligned}$$

Combinando le (5.4) e le (5.5) si ottiene il sistema risolvibile

$$\begin{cases} [Y_L P + Q] \Delta X = 0 \\ R \Delta X = 0 \end{cases}$$

che è un sistema lineare complesso di N_T equazioni in N_T incognite: infatti P e Q sono matrici complesse di dimensioni $n_D(2N+1) \times N_T$, mentre R è una matrice complessa di dimensioni $(n_S - n_D)(2N+1) \times N_T$.

La condizione di esistenza della perturbazione autonoma (cioè $\Delta X \neq 0$) è quindi fornita dalla:

$$D(\sigma + j\omega) \equiv \det \begin{bmatrix} Y_L P + Q \\ R \end{bmatrix} = 0 \quad (5.6)$$

che rappresenta l'equazione caratteristica per le frequenze proprie dello stato stazionario periodico. Uno stato stazionario è stabile se tutte le sue frequenze proprie hanno la parte reale negativa. Perciò una analisi di stabilità essenzialmente consiste nella ricerca delle soluzioni della (5.6) con parte reale positiva, e delle condizioni fisiche conseguenti ad un cambio di segno di queste parti reali.

Il determinante definito dalla (5.6) gode di alcune importanti proprietà, che costituiscono un valido aiuto nel corso della ricerca:

- se N è sufficientemente grande (in teoria, per $N \rightarrow \infty$):
 - $D(\sigma + j\omega)$ è una funzione periodica di ω , di periodo ω_0 ;
 - $D(\sigma - j\omega) = D^*(\sigma + j\omega)$.
- ciò implica che $D(0)$ e $D(\sigma \pm j\omega_0/2)$ sono quantità reali: quindi, le frequenze naturali possono essere reali oppure verificarsi in coppie complesse coniugate;
- a causa della periodicità di D , ogni soluzione $\sigma + j\omega$ della (5.6) rappresenta una famiglia numerabile di frequenze naturali espresse da $\sigma + j\omega + jh\omega_0$, dove h è un intero arbitrario;
- di conseguenza, due soluzioni del tipo $\sigma \pm j\omega_0/2$ rappresentano la stessa frequenza naturale dal punto di vista matematico.

L'equazione caratteristica può essere utilizzata in maniera duplice:

- i) per eseguire una *analisi di stabilità locale*, mediante l'applicazione del criterio di stabilità di Nyquist;
- ii) per eseguire una *analisi di stabilità globale*, ossia per determinare le biforcazioni del luogo degli stati del circuito parametrizzato.

Grazie alla periodicità di $D(j\omega)$, il diagramma di stabilità di Nyquist completo può essere ricavato considerando l'intervallo $-\omega_0/2 \leq \omega \leq \omega_0/2$. Il criterio di stabilità di Nyquist afferma che il numero di giri descritti attorno all'origine del piano complesso dal determinante valutato sull'asse immaginario quando ω varia da $-\infty$ a $+\infty$ è uguale al

numero di frequenze naturali situate nel semipiano $\sigma > 0$. Facendo variare ω da $-\omega_0/2$ a $\omega_0/2$ si ottiene pertanto il numero di frequenze proprie a parte reale positiva per intervallo di periodicità. In questo modo si è in grado di sapere se la soluzione che si sta esaminando è stabile o instabile (stabilità in senso locale).

Una analisi di stabilità globale può essere prodotta facendo uso della teoria delle biforcazioni. Supponiamo di parametrizzare il circuito mediante l'ampiezza V_0 della tensione di eccitazione. La curva descritta nello spazio degli stati dal vettore \mathbf{X} in funzione di V_0 è definita *luogo delle soluzioni*. Se la parte reale di almeno una frequenza naturale cambia di segno quando il parametro attraversa un valore critico (ad es. V_C), allora, per definizione [22], $\mathbf{X}(V_C)$ è una biforcazione del cammino delle soluzioni. Perciò, in corrispondenza di una biforcazione, il determinante $D(\sigma+j\omega)$ si annulla sull'asse immaginario per un valore critico di ω , ad es. ω_C . Per un circuito parametrizzato da un parametro reale, in generale può verificarsi uno dei seguenti casi:

- $\omega_C = 0$: la grandezza reale $D(0)$ si annulla in corrispondenza di un **punto di ritorno** (o, occasionalmente, un **punto doppio**) del cammino delle soluzioni [22]. In questo caso per il circuito si parla *instabilità sincrona* dovuta alla comparsa di una frequenza naturale reale e positiva, la cui conseguenza è un improvviso salto dallo stato critico ad uno stato stabile collocato ad una distanza finita nello spazio degli stati.
- $\omega_C = \pm\omega_0/2$: la grandezza reale $D(\pm j\omega_0/2)$ si annulla in corrispondenza del punto critico. Lo stato stazionario subisce una **biforcazione a duplicazione del periodo**, che si traduce nella nascita di sub-armoniche [22].
- $0 < |\omega_C| < \omega_0/2$: le quantità complesse coniugate $D(j\omega_C)$, $D(-j\omega_C)$ si annullano contemporaneamente nel punto critico. Lo stato stazionario subisce una **biforcazione di Hopf**. Si parla di *instabilità asincrona* che determina la nascita di un'oscillazione spuria di frequenza fondamentale ω_C [22].

Supponiamo che le uniche non linearità contenute nel circuito siano gli induttori isteretici e che la sottorete lineare sia passiva. A bassi livelli di eccitazione ($V_0 \rightarrow 0$) gli induttori isteretici si comportano come induttori lineari, perciò il circuito è certamente stabile [23].

Per poter eseguire una analisi di stabilità del circuito in corrispondenza del livello nominale della tensione di ingresso (V_N), bisogna costruire il cammino delle soluzioni $\mathbf{X}(V_0)$ nell'intervallo di valori $0 \leq V_0 \leq V_N$, mediante una sequenza di analisi di bilanciamento armonico.

Poichè il punto di partenza è stabile, tutte le sue frequenze naturali hanno la parte reale negativa. Questa proprietà (e quindi la stabilità dello stato stazionario) viene mantenuta fino a che non si incontra una biforcazione lungo il luogo delle soluzioni.

A questo punto, sempre rimanendo nell'ambito dei valori di tensione di interesse, si procede alla ricerca delle biforcazioni. I punti di ritorno e le biforcazioni a

duplicazione del periodo possono essere rilevati semplicemente mediante il calcolo delle quantità reali $D(0)$, $D(j\omega_0/2)$ lungo il cammino delle soluzioni.

Se:

- con $V_0^{(m)}$ si indica il valore assunto dal parametro V_0 all' m -esimo passo;
- con $D(V_0^{(m)}, j\omega)$ si indica il valore che il determinante $D(j\omega)$ assume in corrispondenza di $V_0^{(m)}$,

allora si rileva la presenza di una biforcazione di Hopf quando la quantità

$$\arg\left[D(V_0^{(m)}, j\omega_0/2)\right] - \arg\left[D(V_0^{(m)}, -j\omega_0/2)\right] \quad (5.7)$$

subisce un salto pari a 4π passando da $V_0^{(m)}$ a $V_0^{(m+1)}$, visto che ciò denota la comparsa (o la scomparsa) di due frequenze naturali complesse coniugate con parte reale positiva [24].

Se, nel corso di questa ricerca, non si presenta alcuna biforcazione, significa che il punto di lavoro nominale del circuito è stabile. Viceversa, se prima che il parametro raggiunga il valore V_N si incontra almeno una biforcazione, la stessa procedura di ricerca sopra esaminata va ripetuta per i rami biforcati del cammino delle soluzioni, per ottenere una analisi di stabilità globale del circuito nell'intervallo di interesse del parametro.

L'analisi di stabilità discussa in questo paragrafo è concettualmente rigorosa. La sua precisione numerica è esclusivamente limitata dall'errore di troncamento (cioè il valore finito di N), tipico della tecnica del bilanciamento armonico. È anche considerevolmente più generale di altri approcci al medesimo problema [7], perchè rende disponibile un unico strumento numerico per il rilevamento di tutti i tipi di biforcazioni.

5.3 - Esempio di analisi di stabilità locale

Il circuito studiato nel capitolo 4 è stato sottoposto ad una analisi di stabilità in senso locale: a questo scopo è stata scelta la topologia relativa al punto nominale generato dall'ottimizzazione (cioè $C_1=C_2=C_3\approx 3.58\mu\text{F}$, come si può desumere dalla Fig. 4.2).

Come già detto nel paragrafo precedente, una analisi di stabilità locale dello stato nominale del trasformatore si può ottenere mediante il calcolo numerico del diagramma di stabilità di Nyquist. Tale diagramma è riportato in Fig. 5.2 (utilizzando una scala logaritmica per la coordinata radiale).

Come previsto dalla precedente discussione, la curva corrispondente al grafico di $D(j\omega)$ nel piano complesso, al variare di ω nell'intervallo $-\omega_0/2 \leq \omega \leq \omega_0/2$, è una curva chiusa.

Visto che il diagramma di Nyquist non circonda l'origine, lo stato stazionario nominale è stabile.

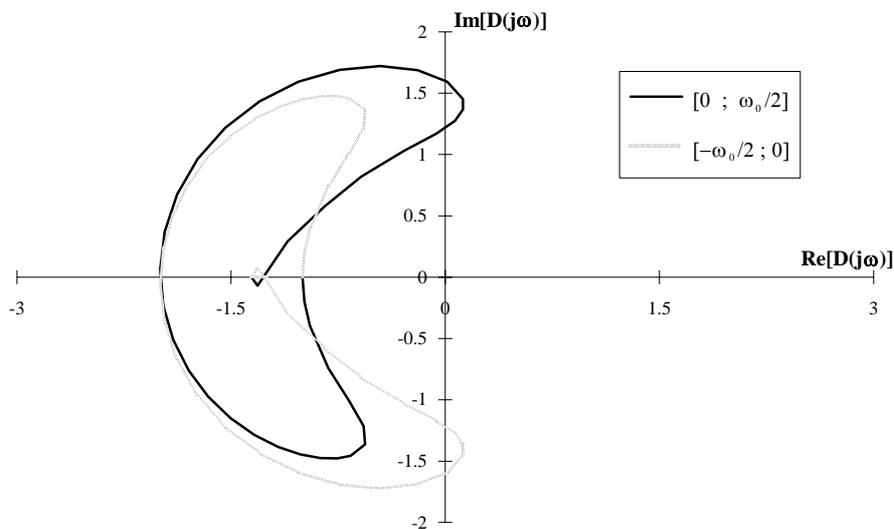


Fig. 5.2

5.4 - Esempi di analisi di stabilità globale

L'analisi di stabilità in senso globale è il fine ultimo di una analisi di stabilità. La costruzione del luogo delle soluzioni nello spazio del circuito parametrizzato, permette di avere una visione completa del comportamento del circuito e degli intervalli di valori del parametro che ne garantiscono un comportamento stabile.

Come primo semplice esempio di analisi globale si è proseguito nell'analisi del trasformatore trifase di Fig. 4.1. Il parametro scelto a questo scopo è la solita ampiezza V_0 del segnale sinusoidale di ingresso, che assume valori nell'intervallo $0 \leq V_0 \leq V_N$, dove V_N è la tensione di eccitazione nominale (nel caso specifico $V_N = 10\text{kV}$). In Fig. 5.3 sono riportati, in funzione di V_0 , i valori delle quantità reali $D(0)$, $D(j\omega_0/2)$, calcolate lungo il cammino delle soluzioni e normalizzate al valore di $D(0)$ per piccoli segnali.

Queste quantità non cambiano di segno per $0 \leq V_0 \leq V_N$, a riprova del fatto che non esistono nè punti di ritorno (o punti doppi), nè biforcazioni a duplicazione del periodo in questo intervallo di tensione. Sfruttando la (5.7) si verifica anche l'assenza di biforcazioni di Hopf nel medesimo intervallo di valori del parametro.

Dato che, per bassi livelli dell'ingresso, il circuito è certamente stabile, viene ribadita la stabilità del punto di lavoro nominale del trasformatore trifase.

I risultati ricavati sono in perfetto accordo con quanto affermato da Deane [5], il quale asserisce che i circuiti contenenti induttori saturabili con isteresi non presentano biforcazioni se eccitati tramite segnali sinusoidali. I salti di stato, le moltiplicazioni del periodo e i comportamenti caotici nascono sostituendo la sinusoide di ingresso con un'onda quadra.

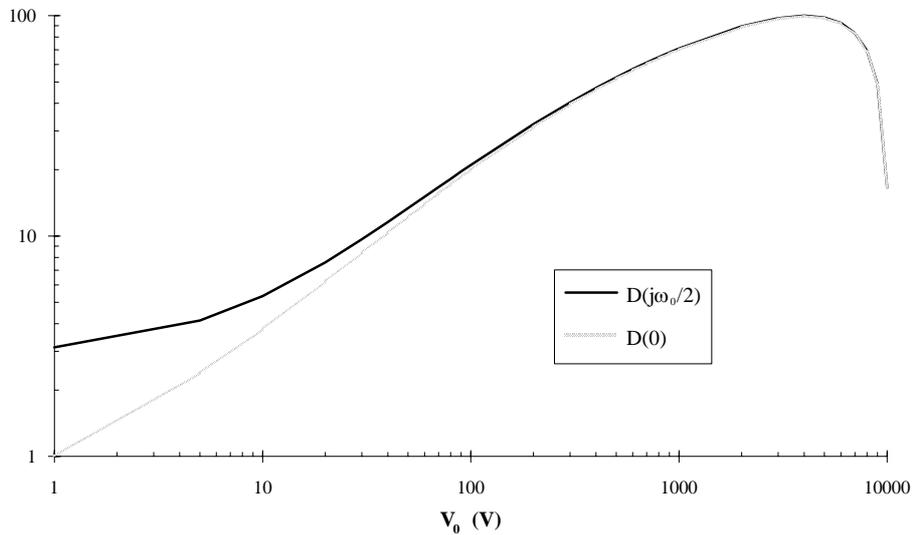


Fig. 5.3

Il tentativo di verificare questa affermazione ha costituito l'ultimo argomento trattato in questo lavoro. Ancora una volta si è cercato di riprodurre risultati ottenuti da simulazioni nel dominio dei tempi [5].

Il circuito oggetto dell'analisi è riportato in Fig. 5.4

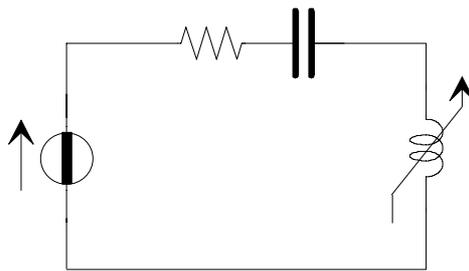


Fig. 5.4

I parametri del modello dell'induttore con isteresi sono ricavati dal riferimento [5], e valgono:

$$\begin{aligned}
 c &= 0.55 \\
 \alpha &= 5 \times 10^{-5} \\
 K &= 17.8 \text{ A/m} \\
 M_s &= 2.75 \times 10^5 \text{ A/m} \\
 a &= 14.1 \text{ A/m}
 \end{aligned}$$

I risultati che seguono dimostrano che anche semplicissimi circuiti contenenti induttori non lineari possono dare origine a comportamenti assai complessi sotto il profilo della stabilità. Il generatore di Fig. 5.4 è un generatore di onda quadra di ampiezza V_0 e frequenza 1.5 kHz: nella simulazione, il suddetto generatore è stato approssimato tramite un generatore di onda trapezoidale [5], il cui andamento in un periodo è riportato in Fig. 5.5.

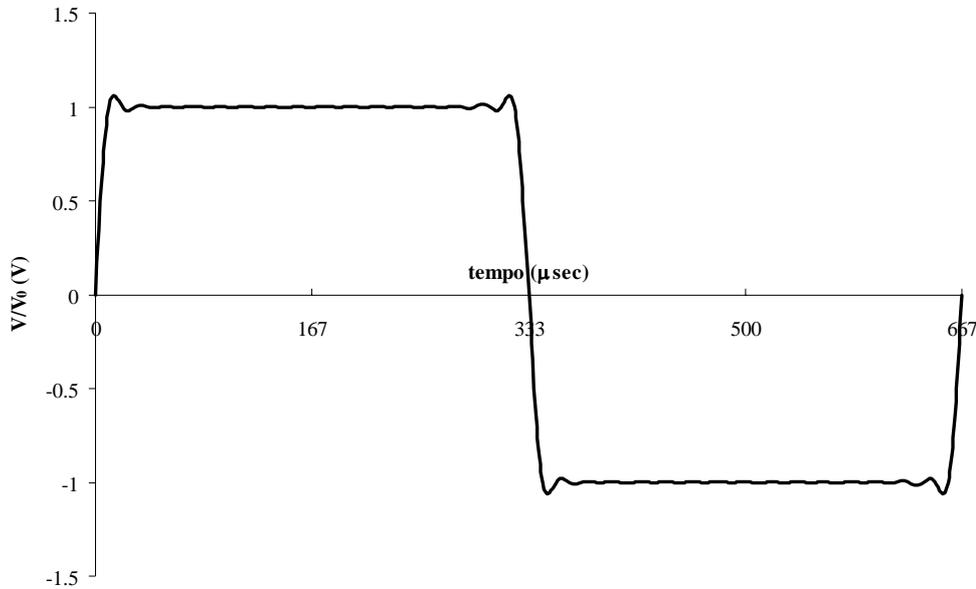


Fig. 5.5

L'andamento non perfettamente coincidente con quello di un'onda quadra è dovuto al numero finito di armoniche scelto ($N=32$) per darne una rappresentazione secondo Fourier.

Il diagramma di biforcazione scelto riporta il valore campionato della forma d'onda della tensione ai capi della capacità in funzione del parametro V_0 .

La simulazione nel dominio dei tempi [5] presenta due differenti diagrammi di biforcazione, a seconda che il parametro sia incrementato (Fig. 5.6) o decrementato (Fig. 5.7). La giustificazione di ciò può essere data rifacendosi al caso particolare descritto in Fig. 5.1, o più in generale sottolineando che, nello spazio degli stati, per certi valori del parametro V_0 , si hanno delle soluzioni multiple; per cui, integrando nel dominio dei tempi le equazioni che descrivono il circuito, è possibile rilevare un ramo del diagramma piuttosto che un altro, a seconda del verso di incremento del parametro adottato.

Con il metodo del bilanciamento armonico associato alla teoria matematica delle biforcazioni è possibile condensare in unico diagramma di biforcazione il comportamento del circuito, evidenziando anche i tratti di soluzioni instabili (invisibili ad una analisi nel dominio dei tempi) e i diversi tipi di biforcazione presenti, che

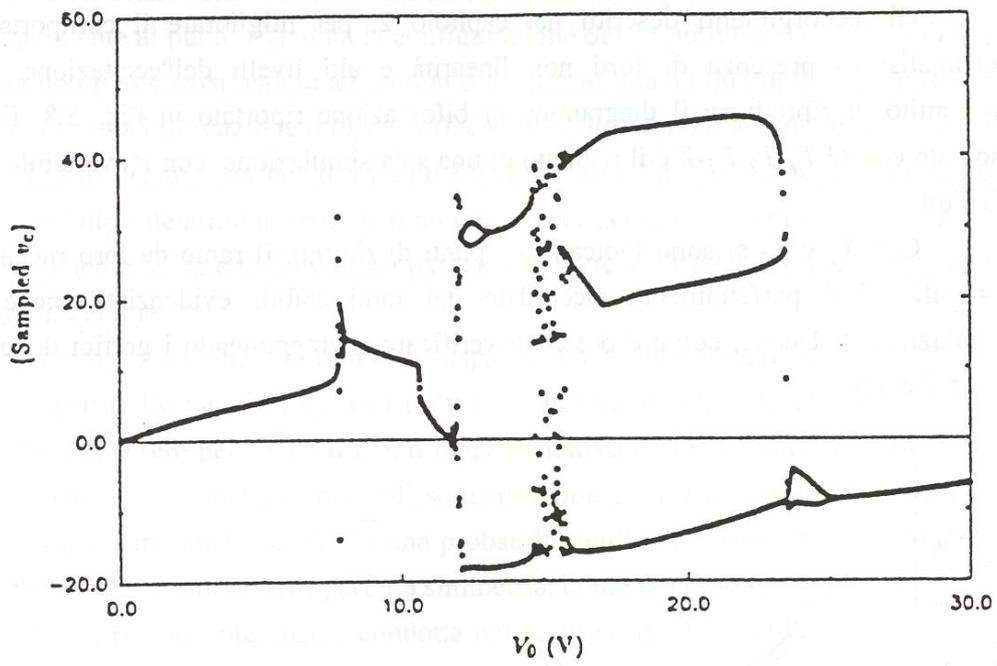


Fig. 5.6

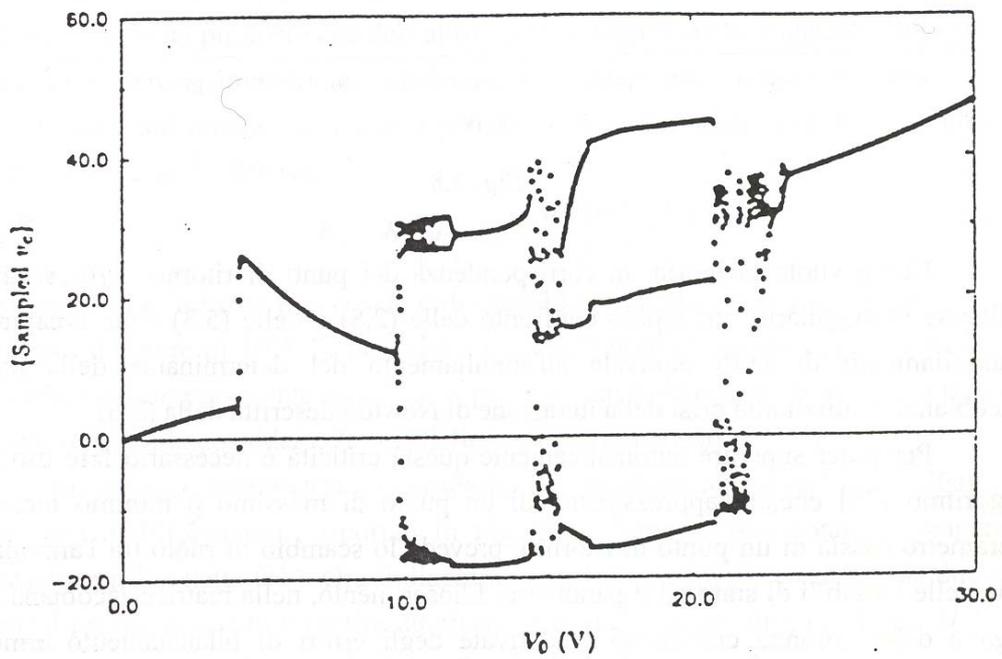


Fig. 5.7

consentono di giustificare la diversità dei due diagrammi simulati con tecniche nel dominio dei tempi.

Gli accorgimenti descritti nel capitolo 2, per migliorare il comportamento dell'analisi in presenza di forti non linearità e alti livelli dell'eccitazione, hanno consentito di riprodurre il diagramma di biforcazione riportato in Fig. 5.8. Il tratto indicato con $O-T_1-T_2-F_1-Z$ è il risultato di una sola simulazione, con V_0 variabile da 0 a 30 Volt.

Con T_1 e T_2 si sono indicati due punti di ritorno: il ramo da loro racchiuso è instabile ed è perfettamente raccordato dai rami stabili evidenziati anche dalle simulazioni di Deane, come è possibile verificare sovrapponendo i grafici delle Figg. 5.6, 5.7 e 5.8.

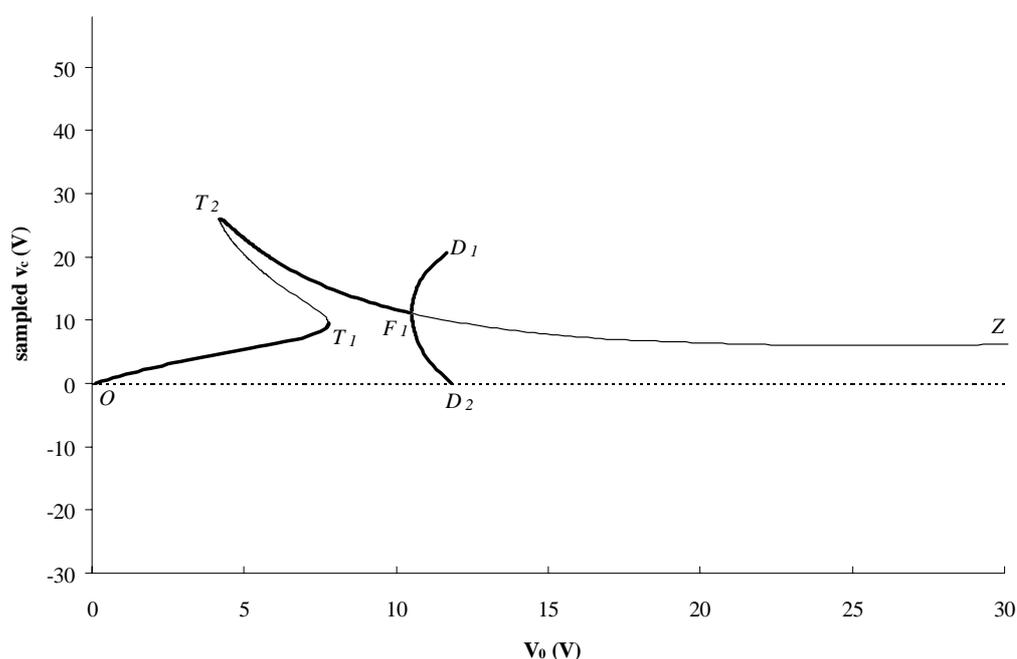


Fig. 5.8

Come vuole la teoria, in corrispondenza dei punti di ritorno, $D(0)$ si annulla sull'asse immaginario: un rapido confronto delle (2.8) e delle (5.3) aiuta a capire che l'annullamento di $D(0)$ equivale all'annullamento del determinante della matrice Jacobiana, e quindi alla crisi della iterazione di Newton descritta dalla (2.6).

Per poter superare automaticamente questa criticità è necessario fare uso di un algoritmo [25] che, all'approssimarsi di un punto di massimo o minimo locale del parametro (ossia di un punto di ritorno), prevede lo scambio di ruolo tra l'armonica di una delle variabili di stato ed il parametro. L'inserimento, nella matrice Jacobiana, della riga e della colonna contenenti le derivate degli errori di bilanciamento armonico rispetto al parametro, permette di eliminare la singolarità e di proseguire nella determinazione del cammino delle soluzioni.

Una analisi di stabilità condotta nell'intervallo di valori [10V-12V] del parametro ha consentito di rilevare un cambiamento di segno di $D(0)$ per $V_0 = 10.42V$ (corrispondente al punto F_1): data la configurazione del cammino delle soluzioni, questa criticità non può corrispondere ad un punto di ritorno, ma ad un punto doppio (nel caso specifico ad una biforcazione *a forchetta*), da cui si dipartono due rami, entrambi stabili. Per il tipo di eccitazione cui il circuito è sottoposto (Fig. 5.5), il regime periodico è costituito dalle sole armoniche dispari non nulle: per determinare i rami F_1-D_1 e F_1-D_2 è stato sufficiente forzare le armoniche pari ad assumere valori diversi da zero e sfasati di 180 gradi, nei due casi.

In virtù della perfetta simmetria dispari del modello dell'induttore descritto dalle (2.13) rispetto alle variabili x_1, x_2 i tratti indicati con F_1-D_1 e F_1-D_2 hanno la stessa probabilità di essere percorsi dal punto rappresentativo dello stato del circuito: nel caso di biforcazione a forchetta si parla di soluzione *non generica*, per sottolineare il fatto che si tratta di un soluzione che ha una probabilità nulla di verificarsi, a meno che non siano soddisfatte condizioni di perfetta simmetria, come nel caso in esame.

La corrispondente analisi condotta nel dominio dei tempi [5] presenta uno solo dei due rami della forchetta: perciò, in questo caso, anche un tratto stabile del diagramma di biforcazione risulta irraggiungibile.

Una analisi sperimentale del medesimo circuito [5] presenta un comportamento analogo a quello evidenziato dalla analisi nel dominio dei tempi. Nel caso sperimentale, però, bisogna tenere conto anche della naturale asimmetria del dispositivo non lineare. Questa asimmetria è la responsabile della scelta, da parte dello stato del sistema, di un ramo della forchetta piuttosto che dell'altro. Questa intuizione ha suggerito l'inserimento forzato di una lieve asimmetria nel modello dell'induttore non lineare con isteresi.

È stato sufficiente sostituire il parametro K del modello con il parametro K_1 , funzione del segno di $dH(t)/dt$:

$$K_1 = K \cdot \left[1 + \text{sign}\left(\frac{dH(t)}{dt}\right) \cdot C_1 \right] \quad (5.8)$$

dove con C_1 si è indicata una costante di piccola entità, che nelle simulazioni eseguite ha assunto il valore di 10^{-3} . Si noti che a considerazioni di questo tipo, qui svolte per semplicità su base puramente intuitiva, si può dare un fondamento matematico rigoroso facendo ricorso alla cosiddetta "teoria delle imperfezioni" [26].

Questa lieve asimmetria ha consentito di riprodurre andamenti più realistici del diagramma di biforcazione, riportati in Fig. 5.9. Come si può notare, scompare la biforcazione a forchetta (F_1). Ora il diagramma di biforcazione è costituito da due rami isolati: il primo, descritto a partire da piccoli valori del parametro, è il tratto $O-T_1-T_2-D_1-D_3-Z_1$; il secondo è il tratto $Z-T_3-D_2-D_4-Z_2$, dove T_3 è un nuovo punto di ritorno che ha sostituito il punto doppio F_1 del caso perfettamente simmetrico.

È interessante notare che il segno della costante C_I nella (5.8) è il fattore discriminante circa la scelta, da parte del punto rappresentativo proveniente dall'origine, di percorrere la parte bassa o la parte alta del diagramma. Infatti, per $C_I = -10^{-3}$ si ottengono sempre due rami isolati, ma le traiettorie seguite sono pressappoco date dai tratti $O-T_1-T_2-D_2-D_4-Z_2$ e $Z-T_3-D_1-D_3-Z_1$.

Rispetto al diagramma della Fig. 5.8 sono presenti due nuovi tratti, indicati con $D_1-D_3-Z_1$ e $D_2-D_4-Z_2$. La parte finale di questi tratti è stabile ed è perfettamente coincidente con la parte conclusiva dei diagrammi delle Figg. 5.6 e 5.7, rispettivamente.

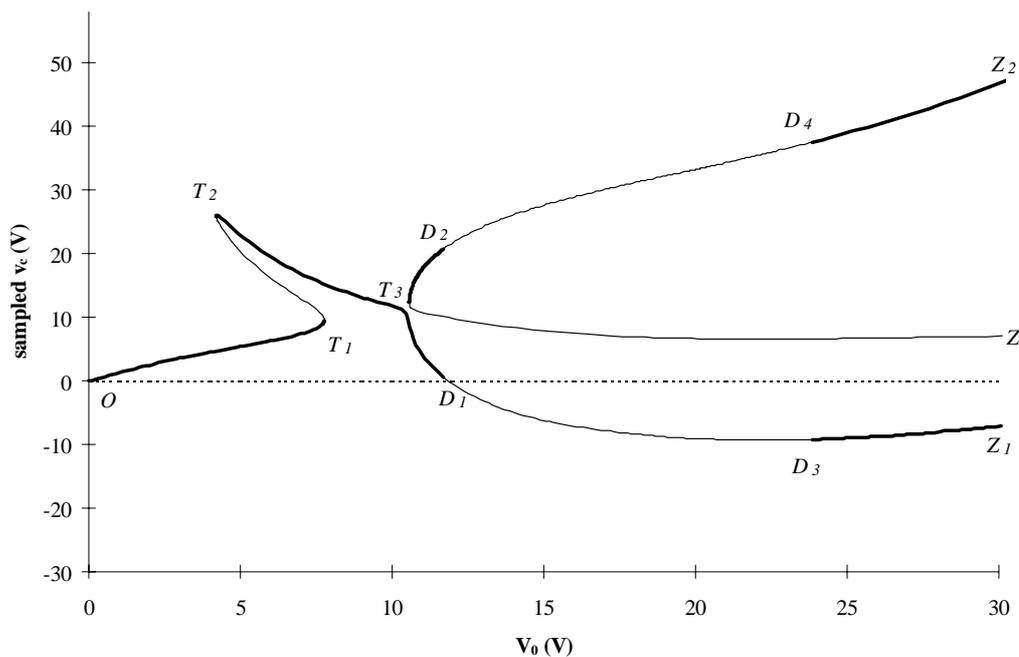


Fig. 5.9

In corrispondenza di bassi valori di V_0 (fino a ≈ 12 V) sono sufficienti 32 armoniche per dare una corretta descrizione del circuito. Al crescere del valore del parametro è indispensabile aumentare il numero delle armoniche nelle simulazioni. Affinchè i tratti $D_1-D_3-Z_1$ e $D_2-D_4-Z_2$ coincidano con i corrispondenti tratti, simulati nel dominio dei tempi, è stato necessario passare a $N = 128$. Ciò ha, ovviamente, aumentato in maniera considerevole i tempi di calcolo delle simulazioni e definito un limite superiore alle possibili duplicazioni del periodo riscontrabili: già una moltiplicazione per otto del periodo richiederebbe 1024 armoniche, cioè la risoluzione di un sistema di 4098 incognite per ogni punto del diagramma.

I punti D_1 e D_2 rappresentano due biforcazioni a duplicazione del periodo, come è stato rilevato da una accurata analisi di stabilità per $10V \leq V_0 \leq 12V$: $D(j\omega_0/2)$ cambia di segno in corrispondenza di $V_0 = 11.67V$.

L'algoritmo per la ricerca della soluzione a frequenza divisa, a partire dalle biforcazioni D_1 e D_2 , prevede di analizzare il circuito a $\omega_0 = \omega_0/2$, con un numero di armoniche raddoppiato e con una delle sub-armoniche (o armoniche del regime diviso)

forzata ad assumere valori diversi da zero. In questo modo è stato possibile determinare i rami a periodo doppio ($N=256$), uscenti da D_1 e D_2 , e a periodo quadruplo ($N=512$), uscenti dalle biforcazioni a duplicazione del periodo rilevate sui rami a periodo doppio (Figg. 5.10 e 5.11).

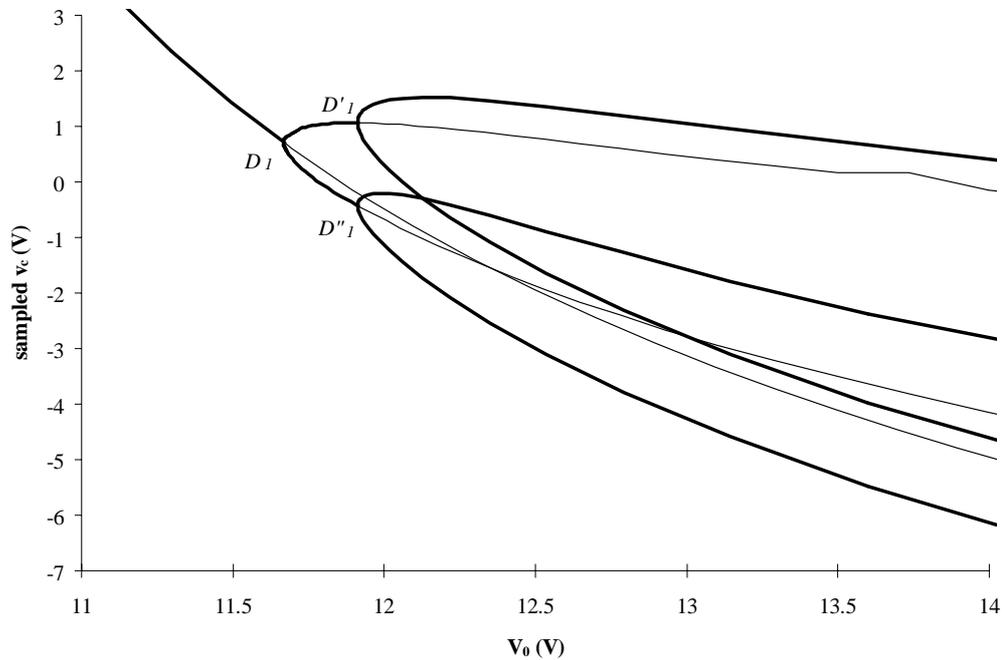


Fig. 5.10

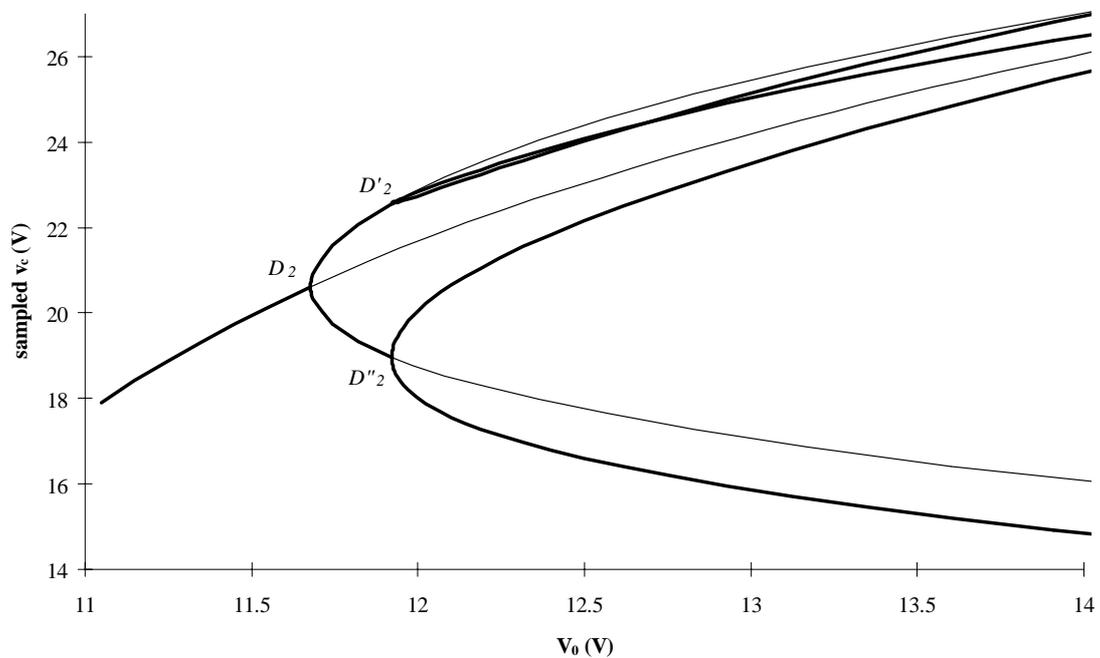


Fig. 5.11

Una onerosa analisi di stabilità, condotta sul ramo a periodo quadruplo della Fig. 5.10, ha indicato l'esistenza di una ulteriore biforcazione a duplicazione del

periodo in corrispondenza del valore 12.05V del parametro. Cercare il ramo uscente dalla biforcazione avrebbe significato eseguire simulazioni a 1024 armoniche, nel tentativo di evidenziare soluzioni a periodo otto, che non trovano giustificazione a partire da un esame delle Figg. 5.6 e 5.7. A differenza di quanto rilevato dalla corrispondente analisi nel dominio dei tempi [5], non è stato quindi possibile riscontrare, nello spazio degli stati, il salto in corrispondenza di $V_0 \approx 12-13V$.

I punti D_3 e D_4 della Fig. 5.9 rappresentano altre due biforcazioni a duplicazione del periodo, rilevate in corrispondenza di $V_0 = 23.83V$. Per poter rilevare questo cambiamento di segno di $D(j\omega_0/2)$, e quindi il passaggio da un ramo instabile (D_1-D_3 o D_2-D_4) ad un ramo stabile (D_3-Z_1 o D_4-Z_2), sono state indispensabili analisi a 256 armoniche. Questo fatto, unitamente alla difficoltà riscontrata nel far nascere i rami a periodo doppio uscenti da D_3 e D_4 con simulazioni a 512 armoniche, è la riprova della necessità di dover gestire spettri di frequenza di dimensioni notevolissime.

Il metodo del bilanciamento armonico è riuscito a riprodurre, anche in queste condizioni critiche, i tratti a periodo unitario del diagramma di biforcazione. Quindi, fintantochè ci si trova il lontananza dal caos, il metodo PHB ha dimostrato tutta la sua efficienza. Viceversa, all'aumentare dello spettro necessario a descrivere lo stato del sistema, subentrano problemi legati alla dimensione del sistema risolvete: non si tratta quindi di limiti concettuali, ma di limiti pratici. Una possibile soluzione al problema, oggetto di una futura attività di ricerca, sarebbe quella di sostituire la iterazione di Newton (2.6) con una iterazione approssimata che consenta di gestire problemi di complessità molto maggiore.

La possibilità di eseguire simulazioni con migliaia di armoniche renderà possibile analizzare situazioni sempre più vicine ad un comportamento caotico, e quindi anche analizzare soluzioni di periodo tre che, per loro natura, sono particolarmente mal condizionate. Infatti, come è possibile desumere dalle Figg. 5.6 e 5.7, i tratti a periodo tre nascono in seguito al verificarsi di comportamenti caotici.

Con la tecnica di simulazione nel dominio dei tempi [5] è stato possibile, in questa circostanza, raggiungere soluzioni precluse alla tecnica del bilanciamento armonico nello stato attuale, anche se lo stesso Deane non fa alcun cenno al tempo di calcolo e alla occupazione di memoria richieste dalle sue simulazioni.

6 - OSCILLATORI NON LINEARI

6.1 - Adattamento del PHB al caso autonomo

In generale un circuito si dice *autonomo di ordine M* se il regime che esso sostiene è un regime quasi periodico risultante dall'intermodulazione di F segnali sinusoidali di frequenze tra loro incommensurabili e se è alimentato da un insieme di F - M ($M \leq F$) generatori sinusoidali liberi. Se $M=0$ il circuito si dice *non autonomo o forzato*.

Nel caso di regime periodico ($F=1$) il circuito è autonomo se non ci sono generatori sinusoidali.

L'analisi di un regime autonomo presenta alcune difficoltà in più rispetto all'analisi di un regime forzato, fra cui, in particolare, la determinazione delle M frequenze di oscillazione libere.

Se ω_0 rappresenta la frequenza del regime periodico incognito (il discorso si può estendere facilmente anche al caso quasi-periodico [27]), il problema dell'analisi si traduce nella risoluzione del sistema non lineare

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}, \omega_0) = \mathbf{0} \quad (6.1)$$

che sostituisce la (2.5) nel caso autonomo.

La (6.1) rappresenta un sistema di N_T equazioni in N_T+1 incognite. Poichè nel circuito non esiste una sorgente forzante (e quindi un riferimento per la fase) a ω_0 , la fase del regime elettrico non è determinata dalla (6.1) e può quindi essere scelta arbitrariamente. Ciò può essere realizzato fissando a zero la parte immaginaria di una delle armoniche delle variabili di stato, che viene assunta come riferimento per la fase. A questo punto il vettore \mathbf{X} contiene solo N_T-1 quantità reali incognite, perciò la (6.1) si riduce ad un sistema di N_T equazioni in N_T incognite.

Il sistema descritto dalla (6.1) può essere risolto mediante la solita iterazione di Newton (2.6), applicata però ad un insieme di incognite contenente il vettore ridotto delle armoniche delle variabili di stato e la frequenza fondamentale. A causa della natura ibrida del vettore delle incognite, il metodo proposto definisce la cosiddetta iterazione di Newton *di tipo misto*, per distinguerla dalla iterazione di Newton puramente armonica applicata alla (2.5) nel caso di circuiti forzati.

Poichè, per ipotesi, in corrispondenza della frequenza ω_0 (e di ciascuna delle sue armoniche) non agisce alcuna sorgente a radiofrequenza, il sistema (6.1) presenta sempre una soluzione *degenere* il cui spettro contiene solamente i prodotti di intermodulazione delle frequenze "forzate" (cioè delle frequenze a cui agiscono delle sorgenti). Nel caso di regime periodico, non essendoci generatori sinusoidali, la soluzione degenere coincide con le armoniche $k\omega_0$ tutte nulle. Questa soluzione può

essere eliminata in diversi modi. Il metodo che ha dimostrato maggiore efficacia nella pratica prevede la sostituzione della (6.1) con il seguente sistema:

$$\frac{\mathbf{E}(\mathbf{X}, \omega_0)}{\sqrt{\sum_{k \neq 0} \|\mathbf{X}_{k\omega_0}\|_2^2}} = \mathbf{0}$$

dove $\|\cdot\|_2$ indica la norma euclidea e $\mathbf{X}_{k\omega_0}$ è il vettore delle armoniche delle variabili di stato in corrispondenza di $k\omega_0$ (per $k \neq 0$). L'uso di questo accorgimento ha consentito di aumentare considerevolmente la robustezza della iterazione di Newton.

Naturalmente, per garantire la dovuta efficienza all'algoritmo di Newton, è necessario che la matrice Jacobiana degli errori di bilanciamento armonico rispetto alle incognite sia calcolata analiticamente, piuttosto che numericamente. Rispetto al caso forzato, si tratta di determinare anche le espressioni analitiche delle derivate degli errori rispetto alla frequenza libera [27].

6.2 - Analisi di stabilità nel caso autonomo

L'applicazione della teoria matematica delle biforcazioni unitamente alla tecnica del bilanciamento armonico continua ad essere un efficiente strumento per l'analisi di stabilità anche per gli oscillatori non lineari.

Così come una semplice analisi non lineare di un circuito autonomo si differenzia dalla analisi di un circuito forzato, anche l'analisi di stabilità è influenzata dalla natura ibrida del vettore delle incognite.

Come già detto all'inizio del capitolo 5, se si vuole studiare la stabilità del regime periodico, avente frequenza angolare ω_0 , rispetto ad una piccola perturbazione sinusoidale $\exp(j\omega t)$, il regime perturbato conterrà i soli prodotti di intermodulazione del primo ordine in ω (o bande laterali). È quindi possibile individuare due differenti tipi di spettro: il primo contenente le armoniche della fondamentale $k\omega_0$, sinteticamente identificato dal pedice H ; il secondo contenente le bande laterali al primo ordine $\omega+k\omega_0$, sinteticamente identificato dal pedice B . Il regime elettrico è quindi quasi periodico e autonomo di ordine $M=1$ e può essere determinato dalla risoluzione del sistema non lineare

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}_H, \mathbf{X}_B) = \mathbf{J}(\omega) \quad (6.2)$$

dove:

\mathbf{E} è il vettore degli errori di bilanciamento armonico;

$\mathbf{J}(\omega)$ è il vettore dei generatori equivalenti secondo Norton delle perturbazioni alle porte della sottorete non lineare;

\mathbf{X}_H e \mathbf{X}_B sono i vettori delle parti reali ed immaginarie delle armoniche delle variabili di stato in corrispondenza delle frequenze $k\omega_0$ e $\omega+k\omega_0$, rispettivamente.

Visto che il circuito si suppone autonomo di ordine 1, nel vettore \mathbf{X}_H la parte immaginaria di una delle armoniche delle variabili di stato è sostituita con la frequenza portante ω_0 .

La soluzione di regime imperturbato assume la forma $\mathbf{X}_H = \mathbf{X}_{H}^{ss}$, $\mathbf{X}_B = 0$, dove l'apice "ss" denota le quantità imperturbate.

La piccola perturbazione $[\delta\mathbf{X}_H, \delta\mathbf{X}_B]$ dello stato del sistema, a partire dalla soluzione di regime imperturbato $[\mathbf{X}_{H}^{ss}, 0]$, può essere quantitativamente descritta perturbando la (6.2) in un intorno del regime periodico imperturbato, cioè mediante il sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{HH}\delta\mathbf{X}_H + \mathbf{M}_{HB}\delta\mathbf{X}_B &= \mathbf{J}_H(\omega) \\ \mathbf{M}_{BH}\delta\mathbf{X}_H + \mathbf{M}_{BB}\delta\mathbf{X}_B &= \mathbf{J}_B(\omega) \end{aligned} \quad (6.3)$$

dove

$$\mathbf{M}_{YZ} \equiv \left(\frac{\partial \mathbf{E}_Y}{\partial \mathbf{X}_Z} \right) \Big|_{ss}$$

e Y, Z stanno per H, B in qualunque combinazione.

Sulla base di semplici considerazioni [28], si verifica che $\mathbf{M}_{HB} = \mathbf{M}_{BH} = \mathbf{0}$. Perciò la (6.3) si riduce alla forma definitiva:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{HH}\delta\mathbf{X}_H &= \mathbf{J}_H(\omega) \\ \mathbf{M}_{BB}\delta\mathbf{X}_B &= \mathbf{J}_B(\omega) \end{aligned} \quad (6.4)$$

È possibile dimostrare che la seconda delle (6.4) conduce alla (5.6), cioè alla equazione caratteristica per le frequenze proprie dello stato stazionario periodico di un circuito forzato. Perciò le perturbazioni *asincrone* ($\omega \neq k\omega_0$) di un regime autonomo sono descritte dalle stesse equazioni valide nel caso forzato. Di conseguenza, la ricerca delle biforcazioni di Hopf di un sistema autonomo può essere condotta utilizzando l'algoritmo descritto dalla (5.7).

La medesima conclusione non può essere tratta per le perturbazioni *sincrone* ($\omega = k\omega_0$), poichè la prima delle (6.4) differisce dalla corrispondente equazione del regime forzato per la presenza in \mathbf{M}_{HH} delle derivate rispetto a ω_0 . Quindi la ricerca, ad esempio, dei punti di ritorno sul luogo delle soluzioni deve avvalersi di algoritmi specifici per i circuiti autonomi.

6.3 - Rumore negli oscillatori

Al pari della teoria sull'analisi di stabilità, anche la teoria sull'analisi di rumore è più complicata nel caso si prenda in considerazione un circuito autonomo.

Dal punto di vista matematico la trattazione rigorosa [4] potrebbe seguire la falsariga di quella appena descritta per l'analisi di stabilità, pervenendo ad un sistema risolvibile analogo alla (6.4).

Anche in questo caso la seconda delle (6.4) descrive l'unico contributo di rumore presente nei circuiti forzati (detto *rumore di conversione*), mentre la prima delle (6.4) descrive l'ulteriore contributo presente solo nei circuiti autonomi (detto *rumore di modulazione*).

Per non appesantire troppo la dissertazione si è preferito dare, in questa sede, una giustificazione più intuitiva del fenomeno rumore [29].

Consideriamo un circuito autonomo il cui regime periodico, di frequenza angolare ω_0 , è perturbato da un insieme di sorgenti di rumore. Il più importante dato di rumore per un circuito siffatto è costituito dal rumore di fase associato alla portante. I due meccanismi che stanno alla base della generazione del rumore di fase in un circuito autonomo possono essere desunti da un esame del diagramma vettoriale riportato in Fig. 6.1.

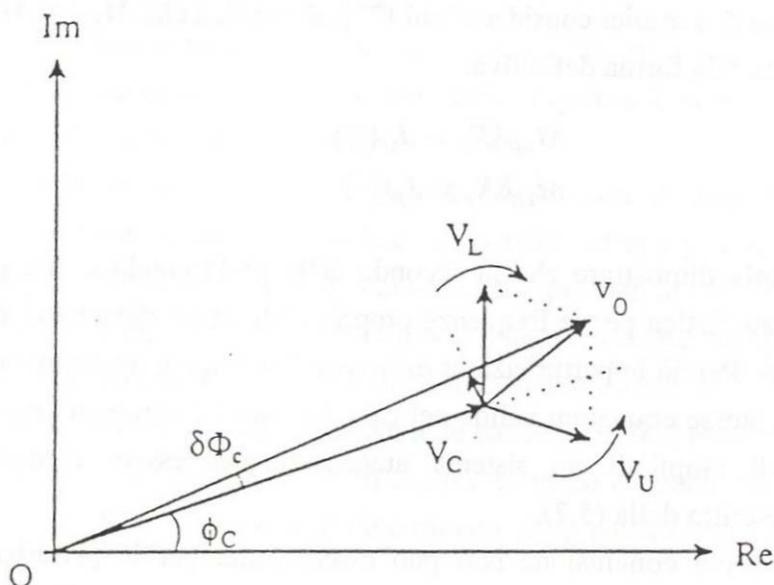


Fig. 6.1

Il vettore V_0 mostrato nella figura rappresenta il fasore della tensione ai capi del carico, che può essere descritto nel piano complesso tramite la

$$V_0 = |V_0| \exp(j\phi_0)$$

in cui il fattore di rotazione $\exp(j\omega_0 t)$ è sottinteso.

In presenza di sorgenti di rumore un primo contributo al rumore di fase dell'oscillatore deriva dalla conversione di frequenza che ha luogo nei dispositivi non lineari. Il fenomeno della conversione di frequenza consiste essenzialmente in uno scambio di potenza tra le bande laterali $k\omega_0 \pm \omega$. ω rappresenta la pulsazione del disturbo, ma può anche essere chiamata offset di frequenza dalla portante ω_0 .

Nella rappresentazione grafica di Fig. 6.1, il contributo di rumore dovuto alla conversione di frequenza (rumore di conversione) può essere descritto mediante la sovrapposizione al regime imperturbato (fasore V_C) di due bande laterali di rumore alle frequenze $\omega_0 \pm \omega$.

Secondo [30], le componenti di rumore, lo spettro delle quali cade all'interno di una stretta banda $\Delta\omega$ nell'intorno di una frequenza data ω , possono essere rappresentate mediante una unica pseudo-sinusoide avente frequenza ω e ampiezza e fase variabili aleatoriamente. Per semplicità supponiamo che $\Delta\omega=1\text{Hz}$ sia sufficientemente piccola da poter adottare la rappresentazione sopra citata.

Siano $V_u(\omega)$ e $V_l(\omega)$ i fasori aleatori delle componenti pseudo-sinusoidali della tensione di rumore sul carico che cadono in bande di 1Hz collocate in corrispondenza delle bande laterali superiore ed inferiore $\omega_0 \pm \omega$, rispettivamente. Nella Fig. 6.1 questi fasori sono rappresentati dai due piccoli vettori che ruotano in direzioni opposte.

Il risultato della somma vettoriale è un vettore perturbato, avente fluttuazioni statistiche di fase e di ampiezza.

Il calcolo di queste fluttuazioni può essere eseguito mediante l'applicazione degli stessi algoritmi usati per l'analisi di rumore nei circuiti forzati, come ampiamente discusso in [31]. Sulla base di questi algoritmi è possibile verificare che, ad una deviazione di frequenza ω dalla portante ω_0 , il rumore di fase dovuto alla conversione di frequenza è esprimibile mediante la forma:

$$\langle |\delta\Phi_c|^2 \rangle = \frac{\langle |V_u(\omega)|^2 \rangle + \langle |V_l(\omega)|^2 \rangle - 2\text{Re} \left[\langle V_u^*(\omega)V_l^*(\omega) \rangle \exp(j2\phi_0) \right]}{|V_0|^2} \quad (6.5)$$

in cui $\langle \cdot \rangle$ rappresenta la media statistica.

Ammettiamo l'ipotesi realistica dell'esistenza sia di sorgenti di rumore termico sia di sorgenti di rumore di tipo "flicker", descrivibili mediante le seguenti espressioni di densità spettrale in continua [32] di tensione e di corrente, rispettivamente:

$$\begin{aligned} \langle |U_t(\omega)|^2 \rangle &= 4K_B T R_s \\ \langle |J_f(\omega)|^2 \rangle &= 4K_B T \frac{Q}{\omega^\alpha} / I_D^\beta \end{aligned}$$

dove:

K_B è la costante di Boltzmann;

T è la temperatura assoluta del circuito;

R_s è una generica resistenza (lineare o non lineare) del circuito;

I_D è la componente continua di una generica corrente $i_D(t)$ che fluisce in un dispositivo non lineare del circuito;

Q, α, β sono parametri del modello di rumore “flicker” (in genere $\alpha=1, \beta=2$).

L'equazione (6.5) prevede che le fluttuazioni di fase siano proporzionali alla densità spettrale di potenza delle sorgenti di rumore, come è intuitivamente confermato dal diagramma vettoriale di Fig. 6.1. Questo fatto, unitamente all'andamento del rumore di fase rilevabile sperimentalmente in tutti gli oscillatori, ci permette di affermare che la (6.5) non è in grado di descrivere il rumore di fase vicino alla portante in un oscillatore libero: infatti, in corrispondenza di piccole deviazioni di frequenza, il secondo membro della (6.5) ha un andamento del tipo ω^{-1} , anzichè ω^{-3} come misurato.

La giustificazione fisica di ciò risiede nel fatto che la (6.5) non prende in considerazione la ulteriore modulazione di frequenza dell'oscillatore operata dalle sorgenti di rumore. In riferimento al diagramma vettoriale di Fig. 6.1, questo effetto può essere visto come una rotazione della figura attorno all'origine. La derivata rispetto al tempo di questa fluttuazione angolare (cioè la frequenza istantanea) ha un valore quadratico medio proporzionale alla densità spettrale delle sorgenti di rumore. Il contributo di modulazione al rumore di fase corrispondente risulta, perciò, trascurabile alle alte deviazioni di frequenza, ma diventa predominante sul contributo di conversione quando ω si avvicina allo zero.

Nell'ambito del metodo del bilanciamento armonico, a partire dalla seconda delle (6.4), si perviene alla seguente espressione per il contributo di modulazione al rumore di fase di un oscillatore [4]:

$$\langle |\delta\Phi_m(\omega)|^2 \rangle = \frac{1}{\omega^2} \mathbf{T}_F \langle \mathbf{J}_H(\omega) \mathbf{J}_H^*(\omega) \rangle \mathbf{T}_F^* \quad (6.6)$$

dove \mathbf{T}_F rappresenta una matrice di trasferimento e * il coniugato trasposto.

In presenza delle medesime sorgenti di rumore prima menzionate, la (6.6) fornisce l'andamento richiesto del rumore di fase vicino alla portante.

Perciò, il simulatore di uso generale adottato calcola il rumore di fase di un oscillatore libero mediante la (6.6) per bassi valori di ω , mediante la (6.5) per alti valori di ω . Per valori intermedi di offset di frequenza è indifferente scegliere l'uno o l'altro contributo, visto che la (6.5) e la (6.6) forniscono gli stessi valori numerici come è possibile desumere dall'esame della Fig. 6.2 che rappresenta l'andamento del rumore di fase in funzione della deviazione di frequenza dalla portante per l'oscillatore a 4.6 GHz schematicamente rappresentato in Fig. 6.3.

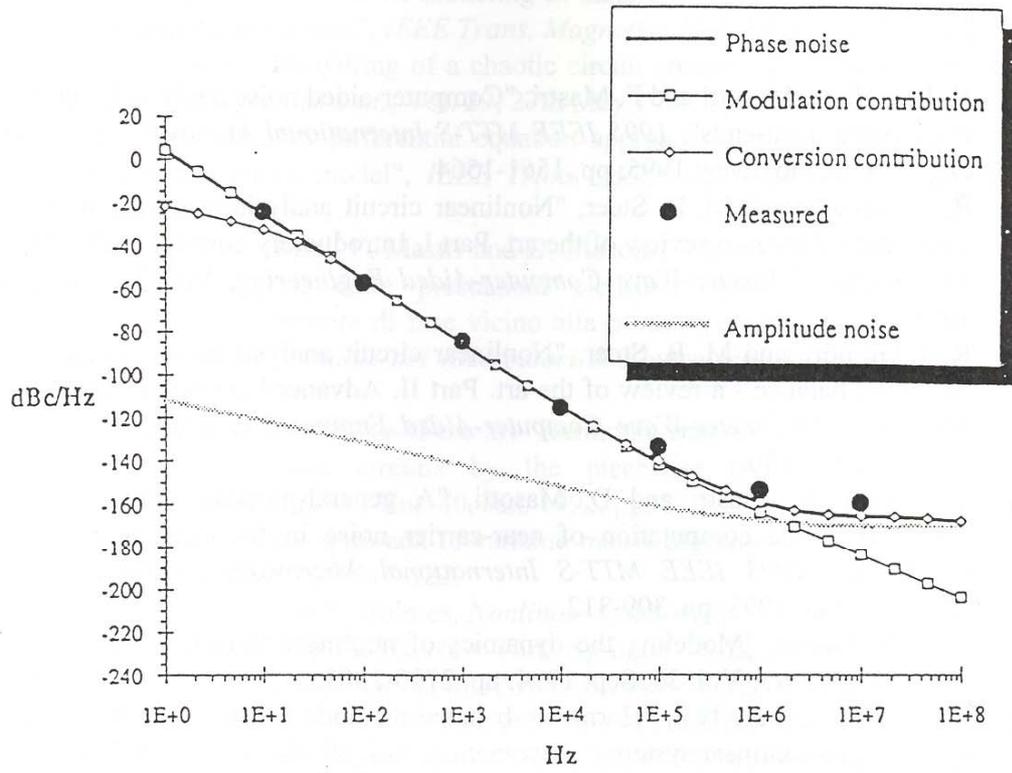


Fig. 6.2

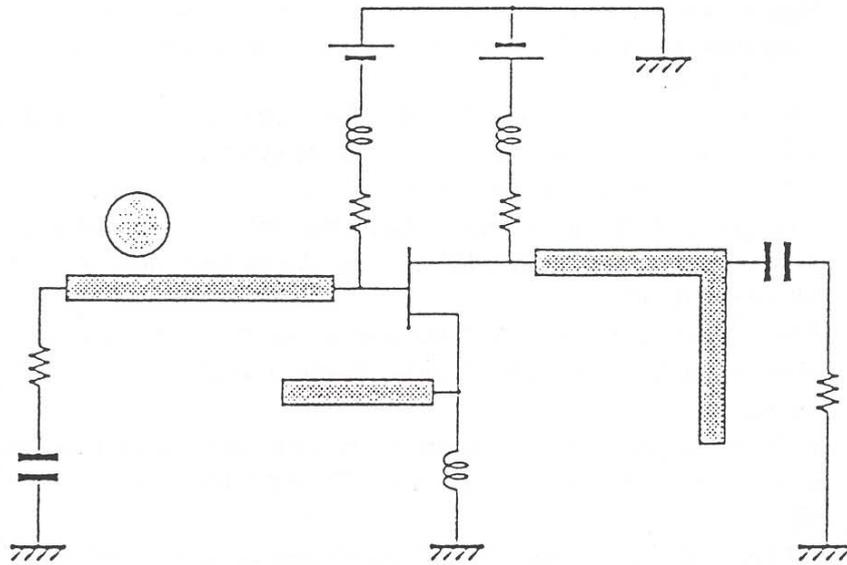


Fig. 6.3

BIBLIOGRAFIA

- [1] V. Rizzoli, D. Masotti and F. Mastri, "Computer-aided noise analysis in integrated microwave front-ends", *1995 IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest* (Orlando), May 1995, pp. 1561-1564.
- [2] R. J. Gilmore and M. B. Steer, "Nonlinear circuit analysis using the method of harmonic balance - a review of the art. Part I. Introductory concepts", *Int. Journal Microwave Millimeter-Wave Computer-Aided Engineering*, Vol. 1, No. 1, Jan. 1991, pp. 22-37.
- [3] R. J. Gilmore and M. B. Steer, "Nonlinear circuit analysis using the method of harmonic balance - a review of the art. Part II. Advanced concepts", *Int. Journal Microwave Millimeter-Wave Computer-Aided Engineering*, Vol. 1, No. 2, Apr. 1991, pp. 159-180.
- [4] V. Rizzoli, F. Mastri and D. Masotti, "A general-purpose harmonic-balance approach to the computation of near-carrier noise in free-running microwave oscillators", *1993 IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest* (Atlanta), Jun. 1993, pp. 309-312.
- [5] J. H. B. Deane, "Modeling the dynamics of nonlinear inductor circuits", *IEEE Trans. Magnetics*, Vol. 30, Sep. 1994, pp. 2795-2801.
- [6] R. Genesio and A. Tesi, "Harmonic-balance methods for the analysis of chaotic dynamics in nonlinear systems", *Automatica*, Vol. 28, No. 3, pp. 531-548.
- [7] C. Piccardi, "Bifurcations of limit cycles in periodically forced nonlinear systems: the harmonic-balance approach", *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Vol. 41, Apr. 1994, pp. 315-320.
- [8] V. Rizzoli, A. Costanzo and D. Masotti, "Modern numerical techniques for the simulation of nonlinear microwave circuits under multitone excitation", *Proceedings of 3rd International Symposium on Recent Advances in Microwave Technology* (Reno), Aug. 1991, pp. 66-69.
- [9] K. S. Kundert and A. Sangiovanni-Vincentelli, "Simulation of nonlinear circuits in the frequency domain", *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, vol. CAD-5, pp-521-535, Oct. 1986.
- [10] M. S. Nakhla and J. Vlach, "A piecewise harmonic-balance technique for determination of periodic response of nonlinear systems", *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-23, pp. 85-91, Feb. 1976.
- [11] H. R. Yeager and R. W. Dutton, "Improvement in norm-reducing Newton methods for circuit simulation", *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, Vol. 8, May 1989, pp. 538-546.
- [12] A. Heitbrink and A. Beyer, "A CAD and optimization program for networks containing magnetic nonlinearities", *IEEE Trans. Magnetics*, Vol. 27, Nov. 1991, pp. 5019-5021.
- [13] V. Rizzoli and A. Neri, "State of the art and present trends in nonlinear microwave CAD techniques", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 36, Feb. 1988, pp. 343-365.
- [14] D. C. Jiles and D. L. Atherton, "Ferromagnetic hysteresis", *IEEE Trans. Magnetics*, Vol. MAG-19, Sep. 1983, pp. 2183-2185.
- [15] V. Rizzoli, D. Masotti and F. Mastri, "General-purpose analysis of nonlinear circuits containing saturating-hysteretic inductors by the Harmonic-Balance technique", *IEEE Trans. Magnetics*, Vol. 31, No. 3, May 1995, pp. 2290-2303.

- [16] D. C. Jiles, J. B. Thoelke, and M. K. Devine, "Numerical determination of hysteresis parameters for the modeling of magnetic properties using the theory of ferromagnetic hysteresis", *IEEE Trans. Magnetics*, Vol. 28, Jan. 1992, pp. 27-35.
- [17] J. H. B. Deane, "Modelling of a chaotic circuit containing a saturating/hysteretic inductor", *Electronics Lett.*, Vol. 29, 27th May 1993, pp. 957-958.
- [18] K. H. Carpenter, "A differential equation approach to minor loops in the Jiles-Atherton hysteresis model", *IEEE Trans. Magnetics*, Vol. 27, Nov. 1991, pp. 4404-4406.
- [19] V. Rizzoli, P.R. Ghigi, F. Mastri and D. Masotti, "Un metodo numerico generale per l'ottimizzazione delle prestazioni elettriche, della stabilità del regime stazionario e del rumore di fase vicino alla portante negli oscillatori liberi", *Atti della X Riunione Annuale dei Ricercatori di Elettrotecnica* (Padova), Jun. 1994, pp. 116-117.
- [20] V. Rizzoli et al., "State-of-the-art Harmonic-Balance simulation of forced nonlinear microwave circuits by the piecewise technique", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 40, Jan. 1992, pp. 12-28.
- [21] R. Fletcher, "A new approach to variable metric algorithms", *Computer Journal*, Vol. 13, Aug. 1970, pp. 317-322.
- [22] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [23] L. Weinberg, *Network Analysis and Synthesis*. New York: McGraw-Hill, 1962.
- [24] V. Rizzoli and A. Neri, "Automatic detection of Hopf bifurcations on the solution path of a parametrized nonlinear circuit", *IEEE Microwave Guide Waves Lett.*, Vol. 3, Jul. 1993, pp. 219-221.
- [25] V. Rizzoli, A. Neri and D. Masotti, "The application of Harmonic-Balance methodology to the analysis of injection locking", *1992 IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest* (Albuquerque), Jun. 1992, pp. 1591-1594.
- [26] G. Iooss and D. D. Joseph, *Elementary Stability and Bifurcation Theory*. New York: Springer-Verlag, 1980.
- [27] V. Rizzoli and A. Neri, "Harmonic-Balance analysis of multitone autonomous nonlinear microwave circuits", *1991 IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest* (Boston), Jun. 1991, pp. 107-110.
- [28] V. Rizzoli, A. Neri and G. Righi, "Analysis of spurious tones in microwave oscillators via the Hopf bifurcation concept", *Proc. 24th European Microwave Conf.* (Cannes), Sept. 1994, pp. 836-841.
- [29] V. Rizzoli, F. Mastri, D. Masotti and A. Neri, "Full nonlinear analysis of near-carrier noise in discriminator-stabilized microwave oscillators", *Microwave and Optical Technology Lett.*, Vol. 6, No. 16, Dec. 1993, pp. 907-911.
- [30] H. E. Rowe, *Signals and Noise in Communications Systems*, Van Nostrand, Princeton, 1965.
- [31] V. Rizzoli, F. Mastri and D. Masotti, "General-purpose noise analysis of forced nonlinear microwave circuits", *Proc. of the MM'92* (Brighton), Oct. 1992, pp. 293-298.
- [32] V. Rizzoli F. Mastri and D. Masotti., "General noise analysis of nonlinear microwave circuits by the piecewise Harmonic-Balance technique", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 42, No. 5, May 1994, pp. 807-819.